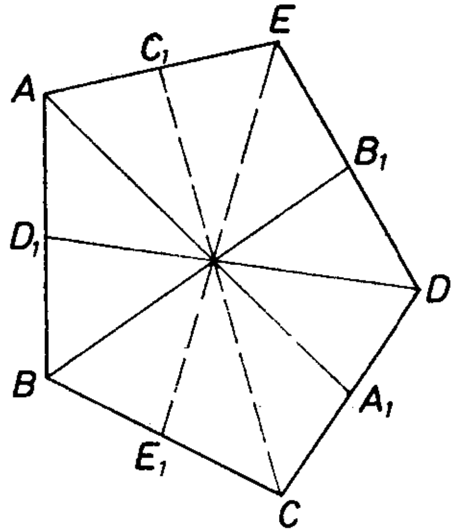
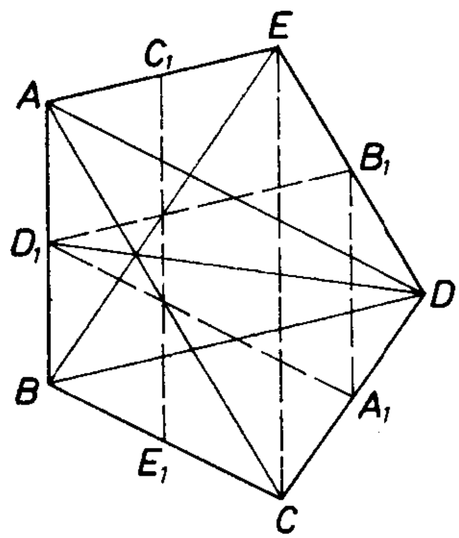
Jelölje $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ az ötszög csúcsait és legyen az $A$ csúccsal szemközti oldal felezőpontja $A_1$, a $B$-vel szemközti oldal felezőpontja $B_1$. és így tovább. Először megmutatjuk, hogy $AB \parallel A_1B_1 \parallel CE \parallel C_1E_1$.




Jelöljük az $X$, $Y$, $Z$ pontok által meghatározott háromszög területét $t_{XYZ}$-vel.

Feltétel szerint

$$t_{AD_1D} + t_{ADE} = t_{BD_1D} + t_{BDC}.$$

A $DD_1$ súlyvonal felezi az $ABD$ háromszög területét: $t_{AD_1D} = t_{BD_1D}$, és ezért $t_{ADE} = t_{BDC}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_{ABE} = t_{EDC} = t_{EAB} = t_{BCD} = t_{ADE}$.

Az $ABC$ és $ABE$ közös alapú, egyenlő területű háromszögek, ezért $E$ és $C$ egyenlő távol van az $AB$ egyenestől, azaz $AB \parallel CE$. Az $ABCE$ trapézban $C_1E_1$ középvonal, a $CED$ háromszögben pedig az $A_1B_1$ középvonal, ezért $E_1C_1 \parallel EC \parallel AB \parallel A_1B_1$. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Ugyanígy kapjuk, hogy $AD \parallel A_1D_1$ és $BD \parallel B_1D_1$, vagyis az $ABD$ és $A_1B_1D_1$ háromszögek oldalai páronként párhuzamosak. A két háromszög tehát centrálisan hasonló. A megfelelő csúcsaikat összekötő szakaszok átmennek a centrumon, $AA_1$, $BB_1$ és $DD_1$ tehát egy pontban metszik egymást.

Abból, hogy az $ACD$ és $A_1C_1D_1$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, kapjuk, hogy $AA_1$ és $DD_1$ metszéspontján átmegy $CC_1$ is. Végül a $BDE$ és a $B_1D_1E_1$ háromszögek centrális hasonlóságából adódik, hogy ezt a közös pontot $EE_1$ is tartalmazza.

*Megyesi Gábor* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

*Megjegyzések.* 1. Sok megoldó próbálta „ fizikusan” megoldani a feladatot. Ezek még fizikai szempontból is hibásak, így természetesen nem kaptak pontot. Mások tudni, ill. bizonyítani vélték, hogy a feltételeknek megfelelő ötszög mindig szabályos. Ez nem igaz.

2. Legyen adva a síkon egy $e$ egyenes és egy $\lambda > 0$ valós szám. Az $e$ egyenesre vonatkozó $\lambda$ arányú merőleges affinitásnak nevezzük a következő transzformációt: Tekintsük az $e$ egyenest egy derékszögű koordináta–rendszer

$x$-tengelyének, és az $(x,\, y)$ pontot vigye a transzformáció a $(\lambda x,\, y)$ pontba. Az affinitással való ismerkedésképpen érdemes bebizonyítani az alábbi tulajdonságokat: az affinitás egyenest egyenesbe visz; egy egyenesen levő pontok távolságarányát megtartja; síkidomok területének arányát megtartja. Ezek alapján belátható, hogy a szabályos ötszög affin képei eleget tesznek a feladat feltételeinek. A feladatban szereplő tulajdonsággal bíró ötszögek pontosan azok, amelyek a szabályos ötszögből legfeljebb két affinitással keletkeznek. Ennek bizonyítását nem részletezzük.