I. megoldás. Legyen a száz szám $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_{100}$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $a_{50} + a_{99}$ milyen előjelű. Mivel

(1) $$a_{50} + a_{99} \leqq a_{51} + a_{99} \leqq \ldots \leqq a_{97} + a_{99} \leqq a_{98} + a_{99},$$

(2) $$a_{50} + a_{99} \leqq a_{50} + a_{100} \leqq a_{51} + a_{1oo} \leqq \ldots \leqq a_{98} + a_{100} \leqq a_{99} + a_{100},$$

ezért ha $a_{50} + a_{99} \geq 0$, akkor (1) és (2) alatt összesen 100 darab nemnegatív összeget soroltunk fel. Ezek között csak $a_{50} + a_{99}$ szerepel kétszer, vagyis találtunk 99 olyan számpárt, ahol a két tag összege nem negatív.

Ha $a_{50} + a_{99} < 0$, akkor

$$a_{50} + a_{99} \geqq a_{49} + a_{98} \geqq \ldots \geqq a_3 + a_{52} \geqq a_2 + a_{51},$$

miatt ennek a 49 számpárnak az összege negatív. Ez az összeg viszont nem más, mint $S - (a_1 + a_{100})$, ahol S jelöli a 100 szám összegét. A feltétel szerint $S = 0$, így ha $a_{50} + a_{99} < 0$, akkor $a_1 + a_{100} > 0$. Ugyanakkor

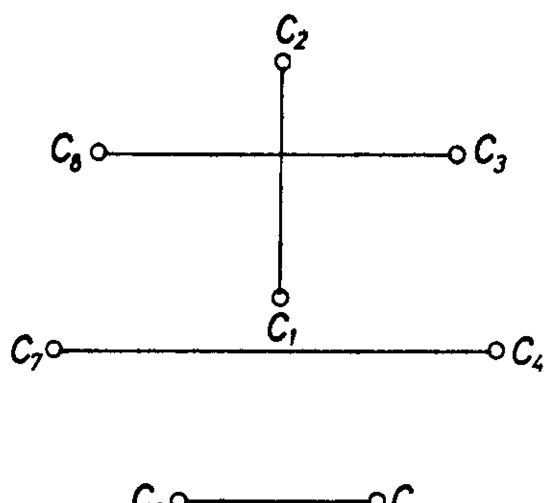
$$a_1 + a_{100} \leqq a_2 + a_{100} \leqq \ldots \leqq a_{98} + a_{100} \leqq a_{99} + a_{100},$$

tehát most is találtunk 99 olyan számpárt, amelyben a két tag összege nem negatív.

II. megoldás. Ismeretes, hogy $2n$ csapat körmérkőzéses bajnokságát (minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszik) $2n - 1$ fordulóban le lehet bonyolítani úgy, hogy minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik.

A feladat állítása ebből a tételből következik. Képzeljük el ugyanis 100 csapatnak egy fenti, 99 fordulós bajnokságát. Ha egy fordulóban az i-edik és a j-edik csapat játszik egymással, akkor tekintsük az $a_i + a_f$ összeget. Egy fordulóhoz 50 ilyen két tagú összeget rendeltünk, s minden két tagú összeg (ami egy mérkőzésnek felel meg) pontosan egy fordulóhoz tartozik. Az ugyanahhoz a fordulóhoz rendelt két tagú összegek összege 0, hiszen ebben az $a_1, \ a_2, \ldots, a_{100}$ alga számok mindegyike pontosan egyszer fordul elő. Így minden forduló mellett valamelyik két tagú összeg nem negatív, ami legalább annyi nemnegatív két tagú összeget jelent, ahány forduló van, azaz 99-et.

A felhasznált tétel bizonyítása eljárást is ad a megfelelő beosztás elkészítésére. Legyen $a > 1$, és tekintsünk egy szabályos $2n - 1$ oldalú sokszöget. Az egyik csapatot – C_1 – feleltessük meg a sokszög középpontjának, a többit pedig a sokszög csúcsainak. Tekintsük a C_1C_2 sugarat, és a sokszög csúcsait összekötő átlók és oldalak közül azokat, amelyek merőlegesek C_lC_2-re (1. ábra).



A szakaszok a végpontjaikban álló csapatok közti mérkőzéseket tekintve éppen egy teljes forduló párosítását adják. Az n szakaszból álló alakzatot a sokszög középpontja körül $2\pi/(2n - 1)$ egész számú többszöröseivel elforgatva összesen $2n - 1$ fordulóhoz jutunk. Minden fordulóban a korábbiaktól különböző mérkőzéseket kapunk, és az összes lehetséges mérkőzést megkapjuk, hiszen a sokszög valamennyi átlója, illetve oldala pontosan egy ilyen alakzatban szerepel.

Megjegyzések. 1. A két megoldás mindegyike szerint elég föltenni, hogy a $2n$ darab szám összege nem-negatív, már ebből is következik, hogy a közülük kiválasztandó számpárok között legalább $(2n-1)$-ben a tagok összege nem negatív. Ennél több nem-negatív párt már nem feltétlenül találunk, mert ha a számok egy kivételével negatívok, akkor csak az a $2n - 1$ összeg nem lesz nem negatív, amelyek egyik tagja az egyetlen pozitív elem.

Fölvethető, hogy $2n + 1$ szám esetén található-e mindig $2n$ olyan pár, amelyben a tagok összege nem negatív, ha a $2n + 1$ darab szám összege ≥ 0. A válasz: igen, ha $n \geq 3$. Ugyanis ha a $2n + 1$ szám között van olyan $a_i < 0$ és a_j, hogy

$a_i + a_j \geq 0$, akkor a számok közül a_i-t elhagyva $2n$ számunk marad, melyek összege pozitív. A fenti állítás értelmében kiválasztható közülük $2n-1$ „nemnegatív pár”, ami az $(a_i,\ a_j)$ párral együtt éppen $2n$.

Ha pedig minden olyan két tagú összeg negatív, amelyben a tagok ellenkező előjelűek, akkor mivel a számok összege ≥ 0, a $2n+1$ szám között legalább $n+1$ pozitív van. Ekkor legalább $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$ olyan pár van, amelyben a tagok összege nem negatív, s ez legalább $2n$, ha ≥ 3.

Az állítás $n=2$ és $n=1$ esetén nem is igaz: $n=2$-re például a $(-3;\ -3;\ 2;\ 2;\ 2)$ szám ötösből csak 3, $n=1$-re pedig a $(-2;\ 1;\ 1)$ szám hármasból csak egy olyan pár választható ki, amelyben a tagok összege nem negatív.

2. A vizsgált kérdés általánosabb formában úgy vethető föl, hogy ha n darab szám összege ≥ 0 és $0<k<n$, akkor mit mondhatunk azoknak az n szám közül kiválasztható k-asoknak a számáról, amelyekben a számok összege nem negatív?

Ha a számok egy kivételével negatívak, akkor éppen $\binom{n-1}{k-1}$ ilyen k-as van – ez azoknak a k-asoknak a száma, amelyekben szerepel az egyetlen pozitív elem. Várható, hogy ez nem mindig érhető el, azonban a kérdés nem látszik könnyűnek.

Ha k osztója, n-nek – ez a $k=2$ esetben azt jelenti, hogy páros sok számunk van –, akkor van legalább $\binom{n-1}{k-1}$ olyan k-as, amelyben a tagok összege nem negatív. Ez a második megoldásban felhasznált tétel alkalmas általánosításából következik, ugyanúgy, mint a megoldásban. A szóban forgó általánosítás a következőképpen hangzik:

Ha k osztója n-nek, akkor megadható n rögzített elem $\binom{n-1}{k-1}$ számú felbontása úgy, hogy minden felbontás n/k darab közös elem nélküli k-elemű részhalmazból áll, továbbá az n elem mindegyik k elemű részhalmaza pontosan egy felbontásban szerepel.

A problémát, hogy ilyen felbontás létezik-e, még a múlt század közepén vetették fel, és csak az 1970-es évek elején oldotta meg a fiatalon elhunyt *Baranyai Zsolt*.