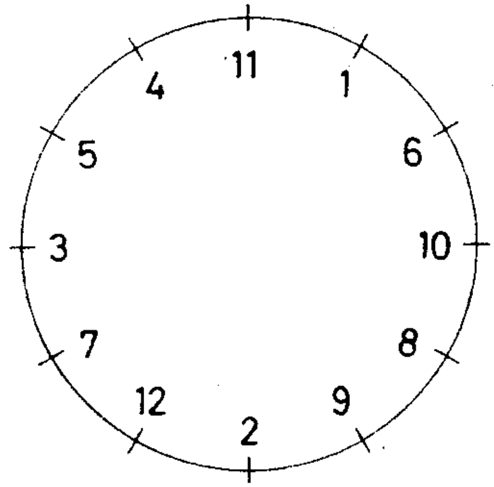
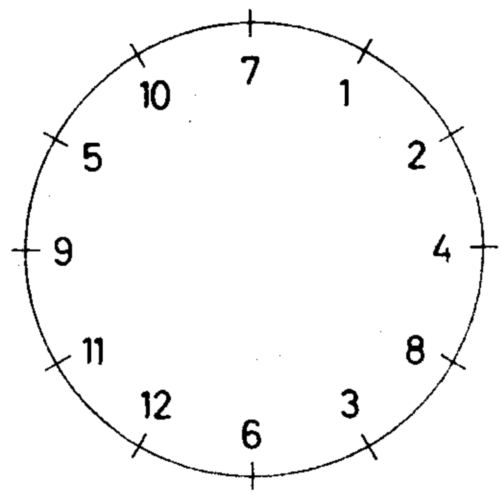
Megfelelő elrendezés látható az 1*a* és 1*b* ábrákon. További megfelelő felírásokat kapunk, ha a számokat fordított sorrendben helyezzük el a kör kerületén, vagy ha a köröket elforgatjuk. Bizonyítjuk, hogy más megoldás viszont nincs.




*1a. ábra*




*1b. ábra*

Egy tetszőleges $1 \leq a \leq 12$ egész számra az $a$, $2a$, $3a$, …, $12a$ számok 13-mal osztva különböző maradékokat adnak. Tegyük fel ugyanis, hogy $ka$ és $la$ 13-mal osztva mégis ugyanazt a maradékot adná ($1 \leq l < k \leq 12$). Ekkor $k \cdot a - l \cdot a = (k-l) \cdot a$ osztható lenne 13-mal. A jobb oldal törzstényezős felbontásában azonban nem szerepelhet a 13, mivel $0 < a < 13$ és $0 < k - l < 13$. Ez ellentmondás, tehát a maradékok között valóban nem lehetnek egyenlők. Így a maradékok között az összes 0 és 13 közötti egész szerepel.

A $b^2 - ac$ kifejezés akkor osztható 13-mal, ha $b^2$ és $ac$ 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Ha adott $a$ és $b$, akkor az előzők alapján pontosan egyféleképpen választhatunk ki az első 12 pozitív egész közül egy olyan $c$-t, amelyre $ac$ ugyanazt a maradékot adja 13-mal osztva, mint $b^2$. Ha most $b$-t választom $a$-nak, $c$-t pedig $b$-nek, akkor ezek ugyanígy meghatározzák a következő számot stb.

Végül is azt kapjuk, hogy ha a kör kerületére fölírunk két szomszédos számot, akkor ezek meghatározzák az összes többi szám sorrendjét is. Kezdjük a számok felírását az 1-gyel. Írjunk mellé egy másik számot. Az előzők alapján rendre felírjuk a soron következő összes többit is.

Ez a felírás nem lesz megfelelő, ha vagy a 12-edik szám előtt olyan számot kapunk, amely már szerepelt korábban, vagy ha a sorozat 13-adik tagja nem azonos az elsővel. Ha 1 mellett 3 vagy 9 szerepel, akkor a következő sorozatokat kapjuk: 1, 3, 9, 1 ill. 1, 9, 3, 1. Ezek tehát nem megoldások.
Ha 1 mellett 4 vagy 10 szerepel, akkor a sorozat így alakul: 1, 4, 3, 12, 9, 10, 1, ill. ennek megfordítottja. Ezek sem megoldások. Ha 1 mellé 5-öt vagy 8-at írunk, az 1, 5, 12, 8, 1, ill. 1, 8, 12, 5, 1 sorozatot kapjuk, ami szintén nem megoldás. 12 sem kerülhet 1 mellé, mivel így 1 másik szomszédja is 12 lenne. Tehát 1 mellé csak a 2, 6, 7, 11 számok valamelyikét írhatjuk, ezekben az esetekben viszont a már leírt megoldások valamelyikét kapjuk.

*Bujdosó László* (Budapest, I. István Gimn., II. o.t.)

*Megjegyzés.* Az 1*b* ábrán az elrendezés 2 hatványaival indul: 1, 2, 4, 8, viszont a 16 helyett, ami túl nagy, a 3 áll. Ez azonban éppen 16-nak a 13-mal való osztásakor fellépő maradéka. Ez a továbbiakban is érvényes; megfigyelhető, hogy az 1*b* ábrán az 1-estől negatív irányban haladva az $i$-edik helyen éppen $2^i$-nek a 13-mal való osztásakor fellépő maradéka áll. Pozitív irányban haladva a számok a 7 hatványainak maradékai, az 1*a* ábrán pedig negatív irányban haladva a 6, pozitív irányban pedig a 11 hatványainak a 13-mal való osztáskor fellépő maradékai állnak.

A maradékokkal való számolás tulajdonságait felhasználva általában is könnyű megmutatni, hogy ha egy kör mentén egy adott szám hatványainak a 13-mal – illetve tetszőleges $p$ pozitív egésszel – való osztásakor fellépő maradékai állnak, akkor bármely három egymást követő $a$, $b$, $c$ számra $b^2 - ac$ osztható 13-mal – illetve $p$-vel. Az is belátható, hogy ha $p$ prím – a 13 az – , akkor a fenti állítás megfordítása is igaz, vagyis a kitűzött feladatnak csak ilyen típusú megoldása lehet. Olyan $r$ számot kell választani, amelyre $r^0$, $r^1$, $r^2$, $\ldots$, $r^{p-1}$ $p$-vel osztva kiadja az összes $(p-1)$-féle nem nulla maradékot. Az ilyen $r$ számokat modulo $p$ vett *primitív gyökök*nek nevezik. A megoldás szerint $p = 13$ esetén négy primitív gyök van, a 2, a 6, a 7 és a 11. Általában is minden prímszámhoz található primitív gyök.