I. megoldás. Legyen az öt szám nagyság szerint növekvő sorrendben $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ és x_5. A tíz összeg legkisebbike x_1+x_2, ez tehát kisebb 15-nél, a legnagyobbik pedig x_4+x_5, ami nagyobb 23-nál. A második legkisebb összeg x_1+x_3, a második legnagyobb pedig x_3+x_5. A feltétel szerint így

$$x_1+x_3=15 \qquad \text{és} \qquad x_3+x_5=23. \tag{1}$$

A két egyenletet összeadva $x_1+x_5+2x_3=38$ adódik, vagyis x_1+x_5 páros szám. A tíz összeg közül ez nem a legkisebb és nem is a legnagyobb, így háromféle értéke lehet: 16, 18 és 20.

Mindhárom esetben (1) -gyel együtt egy-egy háromismeretlenes egyenlet rendszert kapunk $x_1,\ x_3$ és x_5 ismeretlenekkel. Egy szerencsés észrevétellel azonban elkerülhetjük annak vizsgálatát, hogy az egyes esetekben az egyenletrendszerek megoldásai kiterjeszthetők-e a feladat megoldásává.

A tíz összeg legnagyobbikat (x_4+x_5) és legkisebbikét (x_1+x_2) elhagyva a megmaradt nyolc összeg összege

$$3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+x_3=149, \tag{2}$$

vagyis x_3 2 maradékot ad 3-mal osztva. Az $x_1+x_5+2x_3=38$ feltétel szerint x_1+x_5 1 maradékot ad 3-mal osztva, vagyis $x_1+x_5=16$.

Mivel x_3 legalább 2-vel kisebb, mint x_5, ezért x_1+x_3 legfeljebb 14 lehet, ami ellentmond (1)-nek.

A feladatnak tehát nincsen egész megoldása.

Ratkó Júlia (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., L o. t.) és
Kós Géza (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)
dolgozatai nyomán

II. megoldás. Rendezzük ismét nagyság szerint az öt ismeretlen számot. Ekkor teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$x_1+x_2<x_1+x_3<x_1+x_4<x_1+x_5<x_2+x_5<x_3+x_5<x_4+x_5, \tag{3}$$

$$x_1+x_2<x_1+x_3<x_2+x_3<x_2+x_4<x_3+x_4<x_3+x_5<x_4+x_5. \tag{4}$$

Látható, hogy x_1+x_2 a legkisebb, x_1+x_3 az utána következő; x_4+x_5 a legnagyobb, és x_3+x_5 az előtte levő. A többi 6 összeg értéke tehát valamilyen sorrendben 16, 17, 18, 19, 20 és 21. E hat összeg összege:

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+x_2+x_4=111, \tag{5}$$

vagyis x_2+x_4 páratlan szám: értéke 17, 19 vagy 21.

Másfelől x_2+x_4 biztosan kisebb, mint x_3+x_4 és x_2+x_5, viszont biztosan nagyobb, mint x_1+x_4 és x_2+x_3. A három szóba jövő páratlan szám közül csak a 19-nél van legalább két kisebb és legalább két nagyobb a hat szám között, tehát $x_2+x_4=19$. A megadott összegek közül pontosan kettő nagyobb nála, a 20 és a 21. Ezek tehát valamilyen sorrendben az x_3+x_4 és az x_2+x_5. E két összeg összege így

$$x_2+x_3+x_4+x_5=41.$$

Mivel $x_2+x_3+x_4+x_5=(x_2+x_4)+(x_3+x_5)$ és $x_2+x_4=19$, kapjuk, hogy $x_3+x_5=22$. Ez pedig lehetetlen, hiszen a 22 nem szerepel a megadott összegek között.

Azt kaptuk tehát, hogy nincs olyan öt különböző pozitív egész szám, amelyekre teljesülnének a feltételek.

Megjegyzés. A megoldásokban nem használtuk ki, hogy az öt szám pozitív, a feltételek tehát az egész számok körében sem teljesülhetnek.

A számoknak mindenképpen különbözőknek kell lenniük, mert ha öt szám között vannak egyenlők, akkor a belőlük képezhető tíz két tagú összeg között legfeljebb hét különböző lehet.

Elképzelhető, hogy a valós számok körében már van megoldása a feladatnak, vizsgáljuk most meg ezt a lehetőséget. A második megoldás gondolatmenete szerint elindulva most x_2+x_4 páros is lehet. Mivel a vizsgált hat „középső" összeg között van legalább két nála kisebb és legalább két nála nagyobb. Ilyenkor $x_2+x_4=18$.

A 18-nál kisebb két szóba jövő összeg a 16 és 17, ezek tehát valamelyik sorrendben az x_1+x_4 és az x_2+x_3. így most

$$x_1+x_2+x_3+x_4=33.$$

(5) alapján $111=2(x_1+x_2+x_3+x_4)+2x_5+(x_2+x_4)$, ahonnan $x_5=13,5$. Mivel $x_3+x_5=23$ és $x_1+x_3=15$, kapjuk, hogy $x_3=9,5$ és $x_1=5,5$.

A tíz érték közül eddig megkaptuk a 15, a 18, a 19 és a 23-at. A hiányzó hat összeg $x_2+x_1,\ x_2+x_3,\ x_2+x_5,\ x_4+x_1,\ x_4+x_3$ és x_4+x_5. E hat összeg közül kettő értéke nem szerepel a nyolc szám között (x_1+x_2 és x_4+x_5), a megmaradt négy pedig a 16, 17, illetve a 20 és 21 értékeket állítja elő valamilyen sorrendben.

Mivel x_2+x_5 és x_2+x_3 különbsége 4, és ugyanennyi x_4+x_3, valamint x_4+x_1 különbsége is ($x_5-x_3=x_3-x_1=4$), ezért attól függően, hogy milyennek választjuk x_2+x_5 és x_3+x_4 nagyságviszonyát, vagy $x_2+x_5=20$ és $x_3+x_4=21$, vagy pedig $x_2+x_5=21$ és $x_3+x_4=20$. Az első esetben $x_2=6,5,\ x_4=11,5$, a másodikban pedig $x_2=7,5,\ x_4=10,5$. Látható, hogy mind a két esetben megoldást kapunk.

A valós számok körében tehát két megoldása van a feladatnak. Ezek

$$x_1=5,5;\quad x_2=6,5;\quad x_3=9,5;\quad x_4=11,5;\quad x_5=13,5,$$

illetve

$$x_1=5,5;\quad x_2=7,5;\quad x_3=9,5;\quad x_4=10,5;\quad x_5=13,5.$$