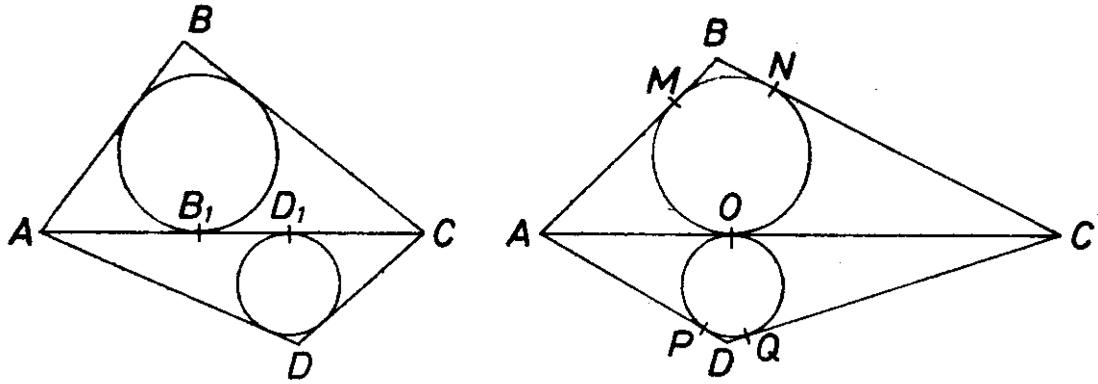
Az ABC háromszög beírt köre érintse az AC oldalt B_1-ben, az ADC háromszögé ugyanazt az oldalt D_1-ben. A két beírt kör akkor és csak akkor érinti egymást, ha B_1 és D_1 egybeesik.



Egy háromszögben a beírt kör érintési pontja és a szomszédos csúcs távolságát az oldalak ismeretében ki tudjuk számítani:

$$AB_1 = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) - BC = \frac{1}{2}(AB - BC + AC),$$
$$AD_1 = \frac{1}{2}(AD + DC + AC) - DC = \frac{1}{2}(AD - DC + AC).$$

A B_1 és D_1 pont akkor és csak akkor esik egybe, ha $AB_1 = AD_1$, azaz ha

$$AB - BC = AD - DC. \tag{1}$$

Ez tehát szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az ABC és ADC háromszögek beírt körei érintsék egymást. Ugyanígy igazolható, hogy az ABD és BCD háromszögek beírt körei akkor és csak akkor érintik egymást, ha

$$AD - AB = CD - CB. \tag{2}$$

Mivel (1) és (2) ekvivalensek, ezért a feladatban szereplő két állítás is ekvivalens – speciálisan az elsőből következik a második. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A megoldásból az is kiadódott, hogy a feladatban szereplő állítások akkor és csak akkor teljesülnek, ha a négyszög érintőnégyszög.

2. Mint megoldóink közül többen észrevették, a feladat megtalálható *Skljarszkij–Csencov–Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/1. kötet Planimetria c. könyvben (140-es feladat, 233. oldal).