I. megoldás. Ha $a<0$, akkor egyik egyenletrendszerünknek sincs megoldása, a két megoldáshalmaz tehát azonos – az üres halmaz – ilyenkor tehát I. és II. ekvivalensek.

A továbbiakban legyen $a \geq 0$. II. második egyenlete azt mondja ki, hogy $x+y$ egész szám. A két egyenletrendszer tehát az a-nak olyan értékeire ekvivalens, amikor ez az egész szám a O. Így a-nak azokat az értékeit kell kizárnunk, melyekre az $x^2+y^2=a$ feltétel mellett $x+y$ fölvehet 0-tól különböző egész értéket is.

Vezessük be az $x+y=m$ jelölést (m egész), és vizsgáljuk meg, hogyan függenek II. megoldásai a-tól és m-től. Az $x=m-y$ összefüggést az első egyenletbe helyettesítve, rendezés után

$$2y^2-2my+m^2-a=0 \qquad (2)$$

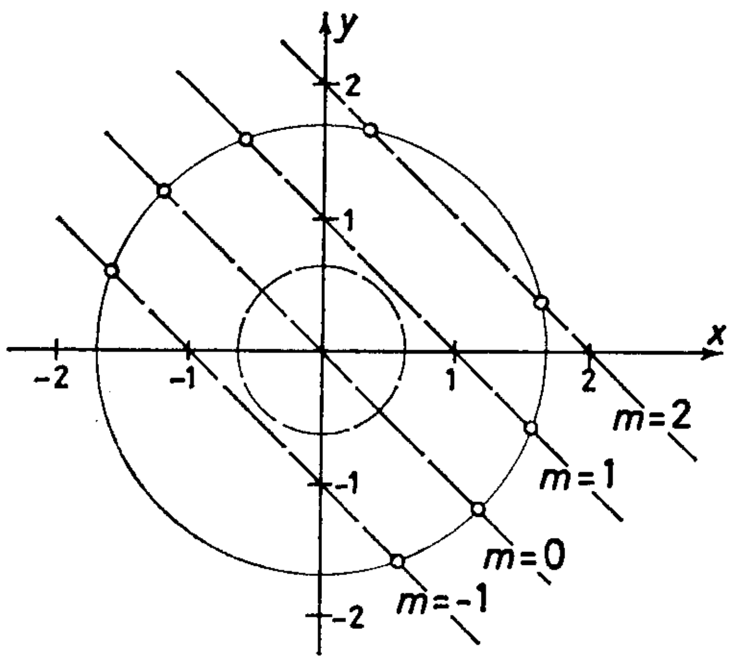
adódik.

Az I. és II. egyenletrendszer pontosan akkor ekvivalens, ha (2) semmilyen y-ra nem teljesül, ha m 0-tól különböző egész szám, vagyis ha (2) diszkriminánsa, $4\left(2a-m^2\right)$, negatív m-nek ilyen értékeire.

Ha $m \neq 0$ és egész, akkor m^2 legalább 1. A diszkrimináns tehát pontosan akkor lesz minden, 0-tól különböző m egész számra negatív, ha $2a<1$, azaz $a<\frac{1}{2}$.

Dringó László (Budapest XI., Petőfi S. Ált. Isk., 8. o. t.)

II. megoldás. Ismét feltesszük, hogy $a \geq 0$ és ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az egyes egyenletrendszerek megoldásait. Azok a pontok, melyeknek koordinátáira $x^2+y^2=a$ teljesül, egy origó középpontú, $\sqrt{a}$ sugarú körvonalon helyezkednek el. Az $x+y=m$ feltételnek eleget tevő pontok pedig egymással párhuzamos egyeneseken.



Mivel $a \geq 0$, a két egyenletrendszer a-nak azokra az értékeire ekvivalens, amelyekre a $\sqrt{a}$ sugarú, origó középpontú körnek csak az $m=0$ értékhez tartozó egyenessel van közös pontja, vagyis a kör az $m=1$, illetve az $m=-1$ értékekhez tartozó $x+y=1$, illetve $x+y=-1$ egyenletű egyenesek által határolt tartomány *belsejében* helyezkedik el.

Az origó épp felezi e két egyenes távolságát, ami $\sqrt{2}$, így a kapott feltétel pontosan akkor teljesül, ha a kör sugara kisebb, mint $\sqrt{2}/2$, vagyis $a<1/2$.