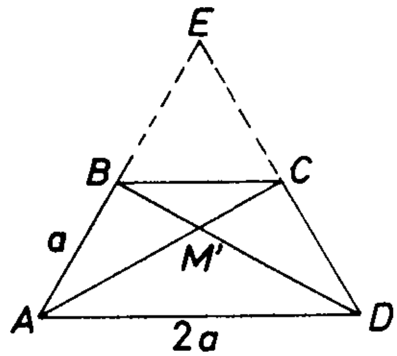
Jelöljük a trapéz AB oldalának hosszát a-val. A két alap nem lehet egyenlő hosszú, mert ekkor a szárak is egyenlő hosszúak volnának, noha a négy oldalból pontosan 3 egyenlő hosszúságú. Ezért a trapéz alapjai csak CB és AD lehetnek, az AB és CD szárak pedig egyenlő hosszúak. Egészítsük ki a trapézt háromszöggé, s jelöljük E-vel a szárak metszéspontját (1. ábra).



1. ábra

Mivel $CB \| AD$ és $CB = \frac{1}{2} AD$, azért az AED háromszög szabályos és oldalának hossza $2a$.

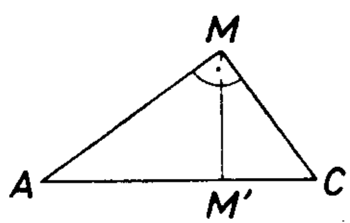
A BEC szabályos háromszög oldala fele az ADE háromszög oldalának, tehát területe negyede annak. A trapéz területe így

$$T_{ABCD} = \frac{3}{4} T_{ADE} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{1}$$

Jelöljük a trapéz átlóinak metszéspontját M'-vel. A B pont felezi az AE szakaszt, hasonlóan C felezi DE-t. Így M' az ADE szabályos háromszög középpontja, tehát

$$\begin{gathered} AM' = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \\ CM' = \frac{1}{3} AC = \frac{a}{\sqrt{3}}. \end{gathered} \tag{2}$$

A gúla négyélű csúcsát jelölje M. A feladat szerint M merőleges vetülete az $ABCD$ lapra éppen M', tehát MM' az AMC háromszög magassága (2. ábra).



2. ábra

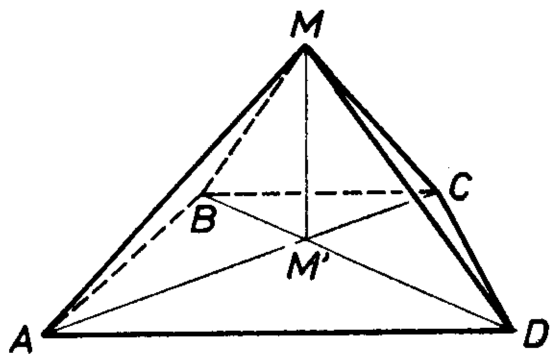
Ugyancsak a feltételek szerint $AMC\sphericalangle = 90^\circ$, a derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek és (2) alapján

$$\begin{gathered} MM' = \sqrt{AM' \cdot M'C} = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ AM = \sqrt{AM' \cdot AC} = a\sqrt{2} \\ CM = \sqrt{CM' \cdot CA} = a. \end{gathered} \tag{3}$$

A gúla V térfogatát most már ki tudjuk számítani :

$$V = \frac{T_{ABCD} \cdot MM'}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

A gúla felszínét a határoló lapok területének összege adja, melyek közül az alaplap területét már ismerjük.



3. ábra

Az $MM'B$ és az $MM'C$, valamint az $MM'A$ és az $MM'D$ háromszögek egybevágók (3. ábra), s így $MB = MC$, $MA = MD$. A BCM háromszög mindhárom oldala éppen a, így területe

$$T_{BCM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Az AMD háromszög egyenlő szárú, s mivel $MA^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, Pitagorasz tételének megfordításából következik, hogy derékszögű is. Így

$$T_{AMD} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Végül az MAB és MCD háromszögek egybevágók és $MA = MD = a\sqrt{2}$, $AB = CD = a$ és $MB = MC = a$ miatt szintén egyenlő szárú derékszögű háromszögek, és területük összege a^2. A gúla felszíne tehát

$$F = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 = a^2\sqrt{3} + 2a^2 = a^2(\sqrt{3} + 2).$$

Dingó László (Budapest XI., Petőfi S. Ált. Isk. 8. o. t.)
dolgozata alapján