A szóban forgó számok közül elegendő azokat vizsgálnunk, amelyek nem tartalmazzák a 0 számjegyet, ugyanis a pontosan kilencjegyű megfelelő számok száma $9! = 362\,880$, vagyis a legalább tízjegyű, adott tulajdonságú számok valamennyien ennél nagyobb sorszámúak lesznek.

Ha a legnagyobb helyi értékű számjegyet rögzítjük, akkor a további nyolc helyre az összes lehetséges sorrendben beírva a maradék nyolc számjegyet; összesen $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$-féle kilencjegyű számot kapunk. Ha tehát az első helyen 1-es áll, akkor a kezdő 40 320 darab számot kapjuk meg, ha 2-es, akkor a következő 40 320-at, azaz a 40 321-ediktől 80 640-edikig, ha pedig 3-as, akkor a 80 641-ediktől a 120 960-adikig kapjuk meg a számokat. Látható, hogy a keresett, 100 000-edik helyen álló szám első jegye 3-as. A továbbiakban azt kell megvizsgálnunk, hogy az 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jegyek mindegyikét pontosan egyszer tartalmazó nyolcjegyű számok közül melyik a $100\,000 - 80\,640 = 19\,360$-adik, nagyság szerint.

Ha most egy nyolcjegyű számban rögzítjük az első jegyet, akkor a további hét jegy minden lehetséges sorrendjének megfelelően $7! = 5040$ különböző számot kapunk. $19\,360 = 3 \cdot 5040 + 4240$, tehát a második helyen szóba jövő számjegyek közül sorrendben a negyediket kiválasztva kaphatjuk meg a 19 360-adik nyolcjegyű számot. Ez a számjegy most az 5-ös. Tovább haladva az 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 jegyekből álló hétjegyű számok közül kell megkeresnünk a 4240-ediket.

Egy hétjegyű szám első jegyét rögzítve $6! = 720$-féle számot kapunk. $4240 = 5 \cdot 720 + 640$, így a még szóba jöhető számjegyek közül a hatodikat, a 8-ast kell kiválasztanunk a harmadik helyre. Most az 1, 2, 4, 6, 7, 9 jegyekből álló hatjegyű számok közül kell megkeresnünk a 640-ediket.

Egy hatjegyű szám első jegyét rögzítve $5! = 120$-féle számot kapunk. $640 = 5 \cdot 120 + 40$, azaz a még lehetséges jegyek közül a hatodikkal – a 9-essel – kezdődők között lesz a 640-edik. A még megmaradt 1, 2, 4, 6, 7 számokból álló ötjegyű számok között kell megtalálnunk a 40-ediket.

Az első jegyet rögzítve $4! = 24$-féle számot kaphatunk. $40 = 1 \cdot 24 + 16$, tehát a még felhasználható számjegyek közül a második, a 2-es áll a következő helyen. A továbbiakban az 1, 4, 6, 7 számjegyekből álló négyjegyű számok között kell megkeresnünk a 16-odikat. Tovább haladva $16 = 2 \cdot 3! + 4$, így most a fenti négy jegy közül a harmadikat kell választanunk, és az 1, 4, 7 számokból álló háromjegyű számok közül van szükségünk a 4-edikre. $4 = 2 \cdot 2!$, vagyis a 4-edik szám első jegye a fenti három jegy közül a második, a 4-es, az utolsó két jegy pedig 7 és 1.

A keresett szám tehát 358 926 471.

Megjegyzés. Ha az első kilenc pozitív egész mindegyikét pontosan egyszer tartalmazó számok halmazát H-val jelöljük, akkor a megoldásban lényegében arra van szükség, hogy összeszámoljuk, hogy az $a = a_9a_8 \dots a_1$ H-beli számra mennyi az a-nál kisebb H-beli számok száma. Ezek a számok aszerint csoportosíthatók, hogy melyik az a legelső helyiérték, ahol kisebb jegy áll bennük, mint a-ban. Ha ez az i-edik, akkor erre a helyre beírhatjuk az összes olyan, a_i-nél kisebb számot, amit az i-ediknél nagyobb helyiértékeken még nem használtunk fel, a további $i-1$ helyen pedig a megmaradt $(i-1)$ darab szám valamennyi $(i-1)!$ darab sorrendje lehetséges.

Ha tehát az első 9 természetes szám egy $a_9a_8 \dots a_1$ sorrendjében k_i jelöli az i-nél kisebb indexű – azaz a fenti sorban a_i mögött álló –, a_i-nél kisebb számok számát, akkor az a-nál kisebb H-beli számok száma

$$k_9 \cdot 8! + k_8 \cdot 7! + \ldots + k_3 \cdot 2! + k_2 \cdot 1! \qquad (k_1 = 0) \tag{1}$$

Arra a H-beli a számra van szükségünk, amelyre a fenti érték éppen 99 999. Ismeretes, hogy minden természetes szám felírható a fenti alakban, „faktoriális számrendszerben”, azaz minden t természetes számra van olyan n nem negatív egész, hogy

$$t = f_n \cdot n! + f_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots + f_2 \cdot 2! + f_2 \cdot 2! + f_1 \cdot 1!,. \tag{2}$$

Ha még azt is föltesszük, hogy $f_i \leqq i$, akkor a fenti felírás egyértelmű. Mivel pedig (1)-ben $k_i \leqq i-1$, hiszen a_i mögött a sorban összesen $(i-1)$ darab szám áll, ezért a 99 999 szám (2) alakjában az együtthatók éppen a k_i számok. A megoldásban lényegében a 100 000 (2) alakban történő felírására került sor.

$$99\,999 = 2 \cdot 8! + 3 \cdot 7! + 5 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1!,$$

azaz $k_9 = 2$, $k_8 = 3$, $k_7 = 5$, $k_6 = 5$, $k_5 = 1$, $k_4 = 2$, $k_3 = 1$ és $k_2 = 1$. Az első kilenc pozitív egésznek az $a_9a_8 \dots a_1$ permutációja lesz a keresett szám, amelyben minden 1-nél nagyobb i-re a_i mögött éppen k_i darab a_i-nál kisebb szám áll a sorban.

Nyilvánvaló, hogy ha az i-nél nagyobb indexű jegyeket már megkaptuk, akkor a_i a megmaradt i darab szám közül nagyság szerint a $(k_i + 1)$-edik lesz. Így nyerjük rendre a keresett jegyeket: $a_9 = 3$, $a_8 = 5$, $a_7 = 8$, $a_6 = 9$, $a_5 = 2$, $a_4 = 6$, $a_3 = 4$, $a_2 = 7$. Az egyetlen kimaradt jegy, az 1-es lesz tehát a_1, vagyis a keresett szám

$$358\,926\,471.$$