

Jelölje a három számot x_1 , x_2 és x_3 . Ha megmutatjuk, hogy $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$ pozitív, akkor ebből következik az állítás, hisz ekkor a szorzatban a negatív tényezők száma páros, és mindhárom tényező nem lehet pozitív, mert ekkor mindhárom szám, és így a szorzatuk is nagyobb volna 1-nél.

A beszorzásokat elvégezve kapjuk, hogy

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + (x_1 + x_2 + x_3) - 1.$$

A feltétel szerint $x_1x_2x_3 = 1$, vagyis egyrészt $x_1x_2x_3 - 1 = 0$, másrészt

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

ahonnan

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = x_1 + x_2 + x_3 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right),$$

ami a feltétel szerint valóban pozitív. Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban a számokról nem használtuk ki, hogy pozitívak, arra nincs szükség.