

A metsző síkok a hasáb tengelyét ugyanabban a pontban metszik, ugyanis a hasábot és a metsző síkokat a tengely körüli 72° -os elforgatások önmagába, ill. egymásba viszik át. E pontot jelöljük O -val. Mivel az eredeti hasáb konvex, és a metsző félterek is azok, ezért a keletkező testek valamennyien konvexek.

1987-11-381-1.eps

1.a ábra

1987-11-381-2.eps

1.b ábra

Tekintsük most az O pontot a hasáb felszínével összekötő szakaszokat (1.b ábra). Ezek nem metszhetik az öt sík egyikét sem, hisz O végpontjuk valamennyi metsző síkon rajta van. Így minden egyes ilyen szakasz valamelyik keletkező test belsejében vagy annak határán halad. Az O pont így valamennyi keletkező testnek csúcsa lesz. Mivel pedig a keletkező testek konvexek, a további csúcsok nem lehetnek a hasáb belsejében. A keletkező testek leírásához tehát elegendő megvizsgálunk, hogy a metsző síkok milyen részekre osztják a hasáb felszínét.

Az alap- és a fedőlapot a metsző síkok nyilván nem metszik belső pontokban. Az oldallapok közül pedig elegendő egyet – például az ABB_1A_1 téglalapot – vizsgálni, mert a hasáb tengelye körüli 72° -os elforgatások az oldallapokat egymásba viszik át. Vizsgáljuk meg, hogy milyen metszősíkoknak van közös pontjuk az ABB_1A_1 lap belsejével (2. ábra)!

1987-11-382-1.eps

2. ábra

Az ABD_1 sík a lap síkját az AB egyenesben metszi, más közös pontjuk tehát nincs. A BCE_1 sík átmegy a B ponton, egy A_2 pontban metszi az AA_1 élt, tehát az ABB_1A_1 lapot a BA_2 szakaszban metszi. Az EAC_1 sík a BCE_1 síknak az AB szakasz felező merőleges síkjára vonatkozó tükörképe, tehát az EAC_1 sík az ABB_1A_1 lapot az AB_2 szakaszban metszi, ahol B_2 az A_2 pont tükörképe az AB felező merőleges síkjára. A CDA_1 sík a BCE_1 síknak a hasáb tengelye körüli 72° -os elforgatottja, tehát átmegy az A_2 pont 72° -os elforgatottján, ami éppen B_2 . Így a CDA_1 sík az ABB_1A_1 lapot a B_2A_1 szakaszban metszi. Ugyanígy kapjuk, hogy a DEB_1 sík az A_2B_1 szakaszban metszi az ABB_1A_1 lapot. Jelöljük az AB_2 és BA_2 szakaszok metszéspontját M_{AB} -vel, az A_1B_2 és B_1A_2 szakaszok metszéspontját pedig N_{AB} -vel (3. ábra)!

1987-11-382-2.eps

3. ábra

A hasáb többi oldallapján ugyanígy kapjuk a $C_2, D_2, E_2, M_{BC}, \dots, M_{EA}, N_{BC}, \dots, N_{EA}$ pontokat.

1987-11-382-3.eps

4. ábra

1987-11-382-4.eps

5. ábra

Ezen előkészületek után rátérünk a keletkező testek leírására. A hasáb $ABCDE$ alaplapjára illeszkedik egy O csúcsú, ötszög alapú szabályos gúla (4. ábra), amelynek 6 csúcsa, 10 éle és 6 lapja van. A hasáb fedőlapjára egy megcsonkított, ötszög alapú gúla illeszkedik (5. ábra), amelynek 11 csúcsa van – $O, A_1, \dots, E_1, N_{AB}, \dots, N_{EA}$, – 20 éle és 11 lapja. A további testekből a 72° -os forgásszimmetria miatt 5–5 db van.

Ezek a testek a következők: Az alapon fekvő gúla oldallapjaihoz illeszkedő tetraéderek (6. ábra). Az alapon fekvő gúla oldaléleihez illeszkedő, két tetraéderből összeálló testek (7. ábra).

1987-11-383-1.eps

6. ábra

1987-11-383-2.eps

7. ábra

Ezeknek a testeknek 5 csúcsuk van – például $O, A_2, A, M_{EA}, M_{AB}$, – 9 élük és 6 lapjuk.

1987-11-383-3.eps

8. ábra

1987-11-383-4.eps

9. ábra

Az oldallapokhoz illeszkedő deltooid alapú gúlák (8. ábra). Ezeknek 5 csúcsuk – például $O, A_2, M_{AB}, B_2, N_{AB}$, – 8 élük és 5 lapjuk van. Végül az oldalélekhez illeszkedő deltooid alapú gúlák (9. ábra). Ezeknek is 5 csúcsuk – például $O, A_2, N_{AB}, A_1, N_{EA}$, – 8 élük és 5 lapjuk van, de nem egybevágóak a 8. ábrán szereplő, deltooid alapú gúlákkal, mert a két gúla térfogata különböző. A gúlák térfogata ugyanis megegyezik például az $ON_{AB}M_{AB}B_2$, illetve az $OB_1N_{AB}B_2$ tetraéderek térfogatának kétszeresével. A két tetraéder O -val szemközti lapjai egy síkban vannak, az $N_{AB}M_{AB}B_2$ és a $B_1N_{AB}B_2$ háromszögek területe viszont nyilván nem egyenlő, mert $N_{AB}M_{AB} = \frac{BB_1}{2}$, B_2 pedig nem felezőpontja a BB_1 szakasznak.

Összesen tehát 6 különböző test keletkezik, a részek száma pedig 22.
Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A beküldők nagy része nem vizsgálta meg, hogy a 8., illetve 9. ábrán látható gúlák egybevágók-e, pedig a feladat ezt is kérdezte.