Legyen az ABC háromszög három oldalfelező pontja F_A, F_B, és F_C, az egyenes és az OF_A, OF_B, OF_C szakaszok által meghatározott szögek legnagyobbika φ (ha több ilyen van, akkor az egyik). Feltehetjük, hogy az egyenes OF_C-vel zár be φ nagyságú szöget, és hogy X, Y és Z az ábrán látható módon helyezkednek el.

1987-01-026-1.eps

Ekkor $\varphi \geqq 60°$, mert $F_AOF_B\sphericalangle = F_BOF_C\sphericalangle = F_COF_A\sphericalangle = 120°$, és $\varphi < 90°$, mert $\varphi = 90°$ esetén az egyenes párhuzamos lenne a háromszög valamelyik oldalával, de feltételünk szerint az egyenes minden oldalegyenest metsz. Egyszerű számolással kapjuk, hogy ha $F_COZ\sphericalangle = \varphi$, akkor $F_AOY\sphericalangle = 120° - \varphi$ és $F_BOX\sphericalangle = \varphi - 60°$. Feltehetjük, hogy $OF_A = OF_B = OF_C = 1$, ekkor a derékszögű háromszögekből:

$$OX = \frac{1}{\cos(\varphi - 60°)}, \qquad OY = \frac{1}{\cos(120° - \varphi)} \qquad \text{és} \quad OZ = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Ezért elegendő megmutatnunk, hogy a $\cos^2(\varphi - 60°) + \cos^2 -(120° - \varphi) + \cos^2\varphi$ összeg állandó. Az addíciós tételek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}
\cos^2(\varphi - 60°) + \cos^2(120° - \varphi) + \cos^2\varphi = \\
= (\cos\varphi \cos 60° + \sin\varphi \sin 60°)^2 + \\
+ (\cos 120° \cos\varphi + \sin 120° \sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi = \\
= \frac{3}{2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{3}{2}.
\end{gathered}$$

Ezzel állításunkat beláttuk.

Megjegyzés: Ha az egyenes párhuzamos valamelyik oldallal, például AB-vel, akkor $\frac{1}{OX^2} = 0$-val számolva szintén a fenti eredményhez jutunk. Az is könnyen adódik, hogy ha $OF_A = OF_B = OF_C = \varrho$, a háromszög beírt körének sugara, akkor $\frac{1}{OX^2} + \frac{1}{OY^2} + \frac{1}{OZ^2} = \frac{3}{2\varrho^2}$.