Tegyük föl, hogy vannak olyan a, b, c, d valós számok, amelyekre

$$ad - bc = 1 \tag{1}$$

és

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = 1. \tag{2}$$

E két egyenlet alapján
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = ad - bc.$$
Rendezzük az egyenletet és szorozzuk 2-vel:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ab + 2cd - 2ad + 2bc = 0.$$

Tovább rendezve:
$$(a + b)^2 + (c + d)^2 + (a - d)^2 + (b + c)^2 = 0.$$

A bal oldalon minden tag nem negatív, tehát egyenlőség csak akkor áll fenn, ha minden tag zérussal egyenlő, azaz

$$a + b = 0 \quad c + d = 0 \quad a - d = 0 \quad b + c = 0$$

Vagyis $a = -b$, $c = -d$, tehát $ad = bc$.
Ekkor viszont $ad - bc \neq 1$. Ellentmondásra jutottunk a föltevésünkkel, és ezzel igazoltuk az állítást.

Megjegyzések. **1.** Az előzőhöz hasonlóan igazolható, hogy az

$$ad - bc = k,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = k$$

egyenlőségek egyidejűleg akkor és csak akkor teljesülnek, ha $a = b = c = d = k = 0$.

2. A komplex számok körében a feladat állítása már nem igaz. Ha pl.

$$a = b = 1, \quad c = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2}, \quad d = \frac{i\sqrt{3} + 1}{2},$$

akkor az (1) és (2) egyenlőségek teljesülnek.

Ladányi László (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)