I. megoldás. Tekintsük a három legnagyobb számot. Ha ezek legkisebbike 2-nél kisebb, akkor a további 47 szám ugyancsak kisebb mint 2, így összegük, S, kisebb, mint $47 \cdot 2$, ami 94. Az S-et 100-ra kiegészítő háromtagú összeg – a három legnagyobb szám összege – így nagyobb, mint 6. Ha viszont a három legnagyobb szám legkisebbike legalább 2, akkor e három szám összege legalább 6.

Beláttuk tehát, hogy a három legnagyobb számra teljesül a feladat állítása.

Almási László (Pécs, Nagy Lajos Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Jelölje a számokat rendre $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$, és készítsük el az alábbi 50 háromtagú összeget:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_2 = a_2 + a_3 + a_4, \ldots, \quad S_{48} = a_{48} + a_{49} + a_{50},$$

$$S_{49} = a_{49} + a_{50} + a_1, \quad S_{50} = a_{50} + a_1 + a_2.$$

Ekkor $S_1 + S_2 + \ldots + S_{50} = 3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{50}) = 300 = 50 \cdot 6$. Az állítás most már következik abból, hogy ha 50 szám összege $50 \cdot 6$, akkor nem lehet a számok mindegyike 6-nál kisebb.

III. megoldás. Képezzük az 50 számból készíthető összes lehetséges háromtagú összegek összegét. Egy adott szám annyi háromtagú összegben szerepel, ahányféleképpen a többi 49 számból ki tudunk választani kettőt. Így minden szám $\binom{49}{2}$-ször szerepel az összegben, vagyis a háromtagú összegek *összege* $100 \cdot \binom{49}{2}$. A háromtagú összegek *száma* másfelől $\binom{50}{3}$.

Mivel $100 \cdot \binom{49}{2} = 6 \cdot \binom{50}{3}$, ezért a második megoldás befejezése szerint adódik, hogy a számhármasok között van olyan, amelyben a számok összege legalább 6.

Megjegyzések. 1. A feladat kézenfekvő módon általánosítható: ha adott n darab szám, melyek összege A, akkor minden 1 és n közé eső k-ra kiválasztható az n darab szám közül k úgy, hogy az összegük legalább $k \cdot \frac{A}{n}$ legyen. Bármelyik megoldás gondolatmenete elvezet a most kimondott állítás bizonyításához.

2. Érdemes megemlíteni, hogy a harmadik megoldásban lényegében azt láttuk be, hogy ha n darab szám átlaga T, akkor minden 1 és n közé eső k-ra az n számból készíthető összes lehetséges k-tagú összegek átlaga $k \cdot T$.

3. A második megoldásból kiderül, hogy nem is egy olyan számhármas van, amelyben a számok összege legalább 6. Ha például az alábbi permutációból kiindulva képezzük az 50 darab összeget:

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{47}, a_{49}, a_2, a_4, \ldots, a_{48}, a_{50},$$

akkor az így adódó 6-nál nem kisebb összeg biztosan különbözik attól, amit a második megoldásban felírt permutációból kapunk. Nem látszik könnyűnek annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy az adott feltételek esetén legalább hány olyan számhármas létezik, amelyben a számok összege legalább 6.