

Tekintsük az  $[1; 2]$ ,  $[2; 4]$ ,  $[4; 8]$ ,  $[8; 16]$ ,  $[16; 32]$ ,  $[32; 64]$ , zárt intervallumokat. Ha  $A \leq 64$  – és természetesen nagyobb, mint  $1$  –, akkor bárhogy is adunk meg  $1$  és  $A$  között hét valós számot, a fenti hat intervallum között mindig van olyan, amelyben a hét szám közül legalább kettő található. Ennek a kettőnek a hányadosára pedig teljesül a feltétel. Így a keresett szám legalább  $64$ .

Ha  $A > 64 = 2^6$ , akkor  $\sqrt[6]{A} > 2$ . Így  $\sqrt[6]{A}$  bármely két egész kitevőjű hatványának is  $2$ -nél nagyobb – vagy  $1/2$ -nél kisebb – a hányadosa. Mivel pedig  $\sqrt[6]{A}$ -nak a  $0$ -adik, első, második, ..., hatodik hatványa  $1$  és  $A$  között van, és a hét szám közül most semelyik kettő hányadosára nem teljesül a feltétel, ezért a keresett  $A$  szám nem lehet nagyobb, mint  $64$ .

A keresett szám tehát a  $64$ .

*Megjegyzés.* Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a szövegben szereplő „között” értelmezésekor nem engedjük meg az egyenlőséget. A bizonyítás első fele szóról szóra elismételhető, az  $A > 64$  esetben pedig  $\sqrt[6]{A}$  helyett egy  $64$  és  $A$  közé eső  $B$  számból – tehát amelyre  $A > B > 64$  – kell kiindulnunk. Ehhez létezik olyan  $C$  szám, melyre  $C > 1$ , másrészt még  $C \cdot B$  is kisebb, mint  $A$ . Ha most  $C$ -t rendre megszorozzuk a  $2$ -nél nagyobb  $\sqrt[6]{B}$  első hét nemnegatív egész kitevőjű hatványával, akkor a kapott hét szám mindegyike nagyobb, mint  $1$ , és kisebb, mint  $A$ , másrészt semelyik kettő hányadosára nem teljesül a mondott feltétel.