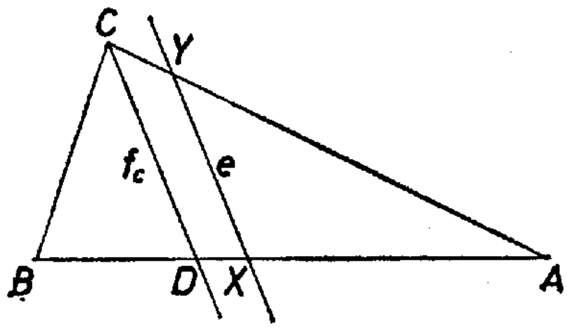
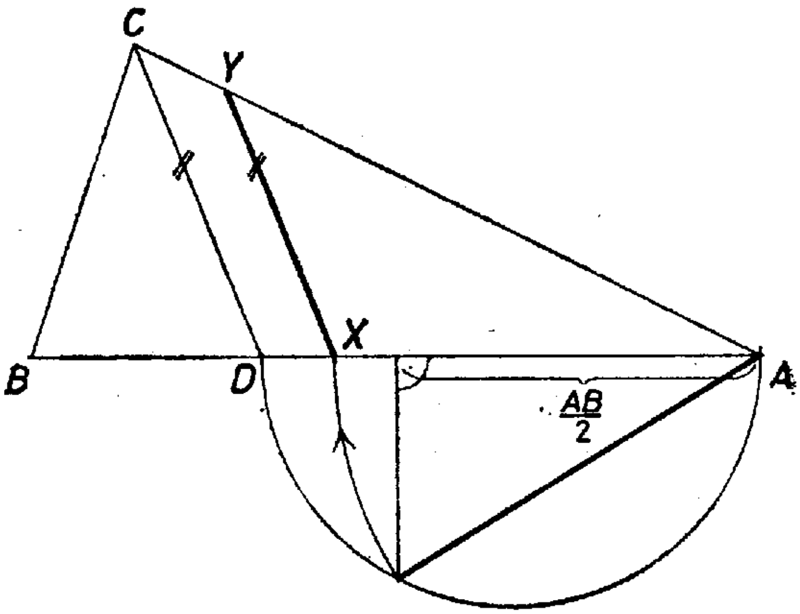
Legyen adva az ABC háromszög. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $AC \geq BC$ és az f_c, szögfelezőhöz keressük a megfelelő párhuzamos e egyenest. Általában jelölje (PQR) a P, Q, R pontok által meghatározott háromszög területét. Ha a szögfelező az AB oldalt D-ben metszi és $AC = BC$, akkor nyilván a szögfelező a megfelelő egyenes. Ha $AC > CB$, akkor $(CBD) \leq (CDA)$ és a keresett e egyenes az AB oldalt a DA szakaszon metszi, legyen ez az X, továbbá e és AC metszéspontja Y.





Úgy akarjuk az XY egyenest felvenni, hogy teljesüljön az

$$2(AXY) = (ABC)$$

egyenlőség.

Az ACD és AYX hasonló háromszögekben jelöljük az oldalhosszak arányát $\frac{AX}{AD} = \lambda$-val. Továbbá a szögfelező osztásarányára vonatkozó ismert összefüggés szerint

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC + CB},$$

\epsfbox{1982-12-208-1.eps}
\epsfbox{1982-12-208-2.eps}

ahonnan

(1) $$AD = AB \cdot \frac{AC}{AC + CB}.$$

Ezt helyettesítve

(2) $$\lambda = AX \frac{AC + CB}{AB \cdot AC}.$$

Mivel hasonló idomok területének aránya az oldalak arányának négyzetével egyenlő,

$$(AXY) = \lambda^2 (ADC),$$

ahova λ (2)-beli értékét helyettesítve

(3) $$(AXY) = AX^2 \left(\frac{AC + CB}{AB \cdot AC} \right)^2 (ADC).$$

Másrészt az ABC és ADC háromszögekben AB, ill. AD oldalakhoz tartozó magasság egyezik, ezért területük aránya az AD és AB alapok arányával egyenlő, azaz (1) felhasználásával

$$\frac{(ADC)}{(ABC)} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC + CB}.$$

Innen (ADC) értékét (3)-ba helyettesítve és felhasználva, hogy $(ABC) = 2(AXY)$, kapjuk, hogy

$$(AXY) = AX^2 \left(\frac{AC + CB}{AB \cdot AC}\right)^2 \cdot \frac{AC}{AC + CB}(ABC) = AX^2 \cdot \frac{AC + CB}{AB^2 \cdot AC} 2(AXY).$$

Ebből AX-re a következő értéket kapjuk:

$$AX = \sqrt{\frac{AB^2(AC)}{2(AC + CB)}} = \sqrt{\frac{AB}{2} \cdot \frac{AC \cdot AB}{AC + CB}} = \sqrt{\frac{AB}{2} \cdot AD}.$$

Leolvashatjuk az összefüggés geometriai jelentését, mely szerint az AX szakasz mértani középarányosa az AD és az $\frac{AB}{2}$, szakaszoknak. AX szakasz tehát könnyen szerkeszthető pl. a derékszögű háromszögekre vonatkozó befogó tétel segítségével (lásd az ábrát). Mindegyik szögfelezőhöz található ily módon egy vele párhuzamos egyenes, amely a háromszög területét felezi.