**I. megoldás.** Jelölje $(a+1)$ egy keresett összeg első tagját, a tagok száma pedig legyen $b$. Ekkor

$$1000=(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+b)=b\cdot a+\frac{b(b+1)}{2}$$

ahonnan 2-vel való szorzás után

(1) $$2000=b(2a+b+1)\text{ adódik}$$

Vegyük észre, hogy (1) jobb oldalán a tényezők összege $(2a+2b+1)$ páratlan, így a két tényező közül az egyik páros, a másik pedig páratlan. Mivel $b$ pozitív, a másik tényező is pozitív, a 2000 pozitív, páratlan osztói az 1, az 5, a 25 és a 125, ennek megfelelően $b$, illetve $2a+b+1$ értékére négy-négy lehetőség adódik. A nyolc egyenletrendszert rendre megoldva

(I) $b=1$, $2a+b+1=2000$ Innen $a=999$, vagyis az 1 tagból álló 1000=1000 megoldást kapjuk.

(II) $b=5$, $2a+b+1=400$ Innen $a=197$, vagyis az 5 tagból álló 1000=198+199+200+201+202 megoldást kapjuk.

(III) $b=25$, $2a+b+1=80$ Innen $a=27$, vagyis a 25 tagból álló 1000=28+29+...+51+52 megoldást kapjuk.

(IV) $b=125$, $2a+b+1=16$ Innen $a=-55$, vagyis a 125 tagból álló 1000=(-54)+(-53)+...+69+70 megoldást kapjuk.

(V) $2a+b+1=1$, $b=2000$ Innen $a=-1000$, vagyis a 2000 tagból álló 1000=(-999)+(-998)+...999+1000 megoldást kapjuk.

(VI) $2a+b+1=5$, $b=400$ Innen $a=-198$, vagyis a 400 tagból álló 1000=(-197)+(-196)+...+201+202 megoldást kapjuk.

(VII) $2a+b+1=25$, $b=80$ Innen $a=-28$, vagyis a 80 tagból álló 1000=(-27)+(-26)+...+51+52 megoldást kapjuk.

(VIII) $2a+b+1=125$, $b=16$ Innen $a=54$, vagyis a 16 tagból álló 1000=55+56+...+70 megoldást kapjuk.

A kapott megoldások különbözők, az ezer tehát nyolc-vagy hétféleképpen (írható föl szomszédos egész számok összegeként aszerint, hogy az I. esetben kapott egyetlen tagból álló $1000=1000$ felbontást megoldásnak tekintjük-e vagy sem.

**II. megoldás**. Ha $a\geq 0$ és

$$(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+b)=1000,$$

akkor

$$(-a)+(-a+1)+\ldots+a+(a+1)+\ldots+(a+b)=1000$$

is teljesül. A két felbontásban összesen $2a+2b+1$, azaz páratlan darab szám szerepel, vagyis az egyik összegnek páros sok, a másiknak pedig páratlan sok tagja van. Eszerint elegendő megtalálnunk azoknak a felbontásoknak a számát, amelyek páratlan sok tagból állnak, az összes felbontások száma ennek kétszerese lesz. (Vagy eggyel kevesebb, ha az egyetlen tagból álló felbontást nem vesszük figyelembe.)

Álljon tehát egy felbontás $2k+1$ darab számból. Ekkor a számok közül a középső – $(k+1)$-edik – előtt álló számok rendre 1-gyel, 2-vel, ..., $k$-val kisebbek, a középső után állók pedig 1-gyel, 2-vel, ..., $k$-val nagyobbak, mint a középső helyen álló szám, vagyis az összeg éppen a középső helyen álló szám $2k+1$-szerese. Ez azt jelenti, hogy a $(2k+1)$ osztója az 1000-nek.

Megfordítva, ha $(2k+1)$ az 1000 egy páratlan osztója, azaz $1000=(2k+1)m$ akkor az $1000=m+m+\ldots+m$ felírásban a középső előtt álló tagokat rendre 1-gyel, 2-vel, ..., $k$-val csökkentve, a középső utániakat pedig 1-gyel, 2-vel, ..., $k$-val növelve az összeg nem változik, másrészt a jobb oldalon így szomszédos egész számok összege áll.

Mivel pedig különböző felbontásokban a tagok száma nem lehet egyenlő, az egyes páratlan tagú felbontásoknak a benne szereplő tagok számát megfeleltetve, a fentiek szerint kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk az 1000 páratlan tagú felbontásai és az 1000 páratlan osztói között. Az 1000-nek 4 páratlan osztója van, vagyis az 1000 négyféleképpen bontható föl páratlan darab szomszédos egész szám összegére. Ennek megfelelően nyolc- vagy hétféleképpen áll elő szomszédos egész összegeként.

*Megjegyzések.* 1. Az első megoldásban sem kell feltétlenül 8 darab egyenletrendszert megoldanunk, annál is inkább, mert a kérdés csupán a megoldások száma. Az (1) egyenlet felírásának lépései ugyanis megfordíthatók, így kétszer annyi – mégpedig különböző – megoldást kapunk, ahányféleképpen a 2000 felbontható egy páratlan és egy páros szám szorzatára. Az egyik tényező ugyanis a felbontásban szereplő tagok száma, a másik pedig az első és utolsó tag összege. 2000 pedig annyiféleképpen bontható egy páratlan és egy páros szám szorzatára, ahány páratlan osztója van, hisz páros. A 2000-nek pedig ugyanannyi páratlan osztója van, mint az 1000-nek.

2. Ha az egyetlen tagból álló felbontásokat kizárjuk, akkor a fenti gondolatmenetek bármelyikével azt kapjuk, hogy ha egy számnak $k$ darab páratlan osztója van, akkor $(2k-1)$-féleképpen írható föl szomszédos egészek összegeként. (Ha egy szám prímtényezős felbontása $2^{\kappa}\cdot p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\ldots p_n^{\beta_n}$ akkor páratlan osztóinak a száma $k=(\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_n+1)$.

3. Ha csak pozitív tagokat engedünk meg a felbontásban, akkor felhasználva, hogy a második megoldásban nemcsak a bennük szereplő tagok számának paritása szerint osztottuk két egyenlő számú csoportra a felbontásokat, hanem aszerint is, hogy az egyes összegekben az első tag pozitív-e vagy sem, adódik, hogy egy szám pontosan eggyel kevesebbféleképpen írható fel szomszédos pozitív egészek összegeként, mint ahány páratlan osztója van. Speciálisan, ha egy számnak csak egy páratlan osztója van, akkor nem is írható föl ilyen módon. Mivel az 1 minden egésznek osztója, azokról a számokról van szó, amelyeknek az 1-en kívül nincs más páratlan osztójuk. Ezek pedig éppen a 2 hatványai. Azt is megtudtuk tehát, hogy a 2 hatványai – és csak ezek – nem írhatók föl szomszédos pozitív egész számok összegeként.