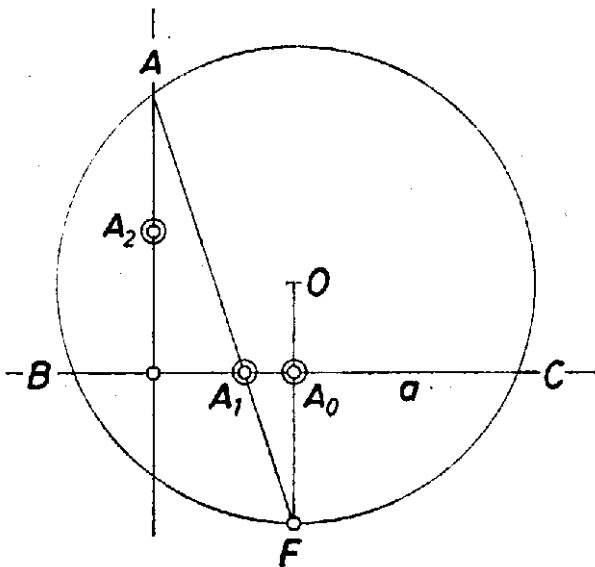


Az  $A_0A_1$  egyenes azonos a keresett háromszög  $BC = a$  oldalának egyenesével. Ha erre  $A_2$ -ből merőlegest állítunk, megkapjuk a háromszög  $A$ -ból induló  $m_a$  magasságvonalát. Továbbá azt is tudjuk, hogy  $m_a$  és  $BC$  metszéspontjától az  $A$  csúcs kétszer olyan messzire van, mint az  $A_2$ . Ezzel sikerült az  $A$  csúcs helyét meghatározni. A további két csúcs meghatározásához vegyük észre, hogy ha  $A_0$  pontban  $BC$ -re merőlegest állítunk, ez a keresett háromszög körülírt körét  $F$  pontban metszi és  $BF = FC$  miatt  $F$  egyben a  $BAC$  szögfelezőjén,  $AA_1$ -en is rajta van.  $F$  ismeretében könnyen meghatározhatjuk a körülírt kör  $O$  középpontját, ez ugyanis az  $AF$  és  $BC$  húrok felezőmerőlegesének metszéspontja. A körülírt kör fogja kimetszeni az  $A_0A_1$  egyenesből a hiányzó  $B$  és  $C$  csúcsait a háromszögnél.



A szerkesztés menetéből következik, hogy ha a háromszög létrejön, akkor eleget tesz a feltételeknek.

Most vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett jön létre a kívánt háromszög. Először is feltehetjük, hogy a pontok mind különbözők, továbbá hogy nincs mind a három egy egyenesen. Ha ugyanis  $A_2$  illeszkedne az  $A_1A_0$  egyenesre, akkor  $A$  is ezen az egyenesen lenne, és így nem jöhetne létre a háromszög. Másodszor, mivel az  $F$  pontnak a  $BC$  egyenesnek az  $A$ -t nem tartalmazó partján kell létrejönnie, kell hogy  $AA_1A_0$  tompaszög legyen, de ekkor  $A_0A_1A_2$  is tompaszög, hiszen az  $AA_2$  egyenes merőleges az  $A_0A_1$  egyenesre és  $A_2$ ,  $A$  az  $A_0A_1$  egyenes ugyanazon partján van. Ilyen feltételek mellett a  $BC$  és  $AF$  felezőmerőlegesek metszéspontja,  $O$  mindig létrejön, hiszen  $BC$  nem lehet párhuzamos  $AF$ -fel.

Azaz ha  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  pontok különbözők és nem esnek egy egyenesbe, valamint  $A_2A_1A_0$  tompaszög, akkor a háromszög mindig egyértelműen megszerkeszthető.

Végül vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amikor két pont egybeesik. Nyilván  $A_2$  nem eshet egybe sem  $A_1$ -gyel, sem  $A_0$ -val. Ha  $A_0$  azonos  $A_1$ -gyel, de  $A_2$ -vel nem, akkor az  $A$ -ból induló szögfelező a szemközti oldalt annak felezőpontjában metszi, azaz a háromszög egyenlő szárú. Ekkor  $A_0A_2$  egyenes a háromszög magasságvonalára és  $2A_0A_2 = A_0A$  ismeretében az  $A$  csúcs helye megszerkeszthető. Az  $A_0$  ponton átmenő  $A_0A$ -ra állított merőleges tetszőlegesen kijelölhetjük a  $B$  csúcs helyét. Ennek  $A_0$ -ra való tükrösképe lesz a  $C$  csúcs. Az így kapott  $ABC$  háromszög valóban eleget tesz a feltételeknek, és ebben az esetben a feladatnak számtalan sok megoldása van.