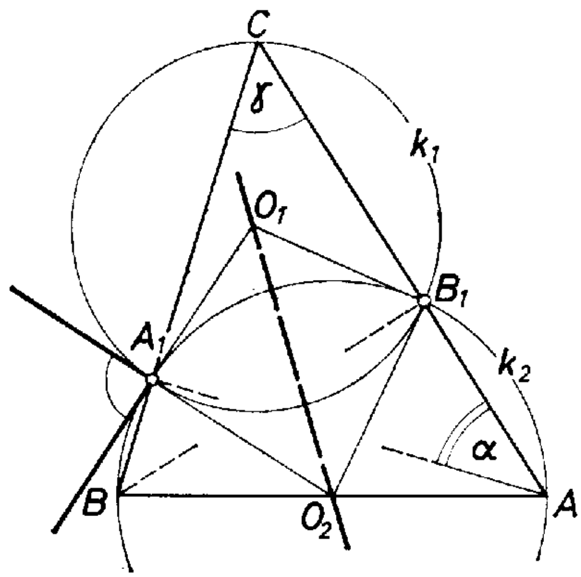
I. megoldás. Az hogy két kör merőlegesen metszi egymást, azt jelenti, hogy a metszéspontjaikban húzott érintőik merőlegesek egymásra, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy a közös pontjukban húzott sugaraik merőlegesek egymásra. Ezt fogjuk bizonyítani.

Az $AA_1 \perp BC$ és $BB_1 \perp AC$, azaz A_1, B_1 pontok rajta vannak az AB szakasz Thalész körén, k_2-n. Továbbá azt is tudjuk, hogy A_1, B_1 a k_1 körnek is pontja. Jelöljük k_1 középpontját O_1-gyel, k_2-ét O_2-vel. Nyilvánvaló, hogy $O_1A_1O_2\sphericalangle = O_1B_1O_2\sphericalangle$, hiszen ezek egymás tükörképei az O_1O_2 centrálisra. Legyen $BCA\sphericalangle = \gamma$ és $A_1AC\sphericalangle = \alpha$. Mivel a háromszög hegyesszögű, $\alpha < BAC\sphericalangle < 90^\circ$, és $\gamma < 90^\circ$ miatt mindkettő ugyanannak a derékszögű háromszögnek a szöge és $\alpha + \gamma = 90^\circ$. A k_1 körben az $A_1O_1B_1\sphericalangle = 2A_1CB_1\sphericalangle = 2\gamma$, ugyanazon ívhez tartozó kerületi és középponti szögek. A k_2 körben hasonlóan $A_1O_2B_1\sphericalangle = 2A_1AB_1\sphericalangle = 2\alpha$, hiszen A_1, B_1 az AB átmérő ugyanazon oldalára esnek.



1. ábra

Ezekből következik, hogy az $A_1O_1B_1O_2$ deltoidban

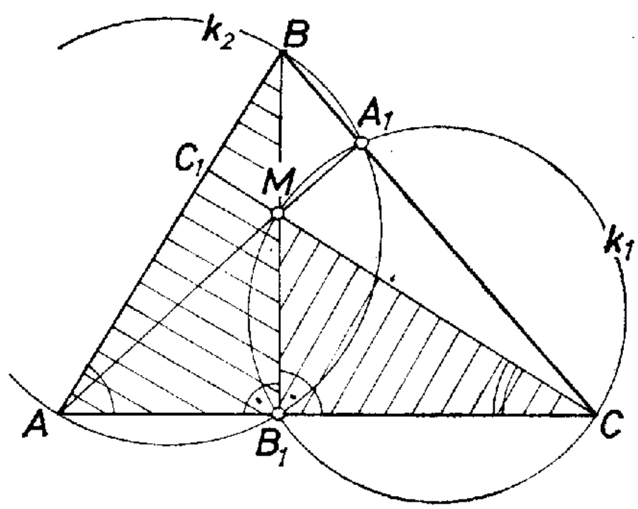
$$O_1A_1O_2\sphericalangle + O_2B_1O_1\sphericalangle = 360^\circ - (2\alpha + 2\gamma) = 180^\circ,$$

tehát mindegyikre külön-külön 90° jut, amint azt bizonyítani akartuk.

II. megoldás. Húzzuk meg az ABC háromszög harmadik magasságvonalát is, talppontját jelöljük C_1-gyel. A CA_1B_1 pontokon átmenő k_1 kör átmegy a háromszög M magasságpontján is, megegyezik a CM szakasz Thalész körével. A

$$B_1AB \,\triangle \sim C_1AC \,\triangle$$

mindkettő derékszögű és az A csúcsnál levő szögük közös. Mivel a háromszög hegyesszögű, M belső pont.

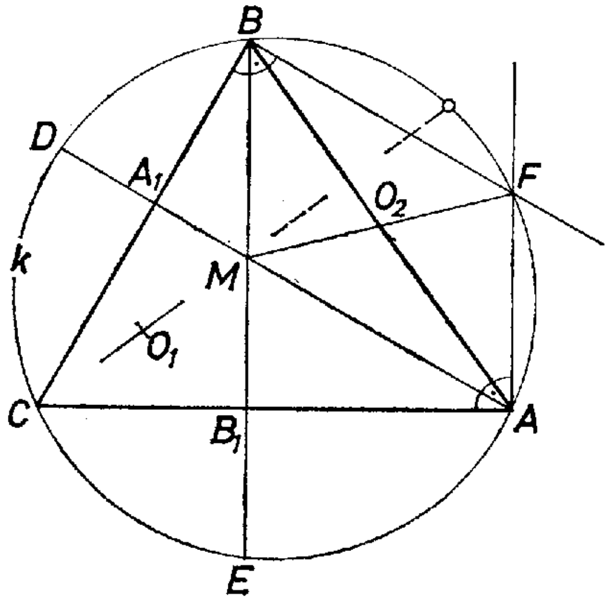


2. ábra

De akkor az ABB_1 háromszög hasonló az MCB_1 háromszöghöz is, mégpedig úgy, hogy B_1 pont körül $90°$-kal megfelelő irányba elforgatva, hasonló helyzetbe hozhatók. Ez a $90°$-os forgatás a k_2 kört is elforgatja, mégpedig úgy, hogy az k_1-nek a B_1-ből kicsinyített képe lesz. Tehát eredetileg a két kör merőlegesen metszette egymást.

Bene László (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)

III. megoldás. Emeljünk merőlegest A-ban az AC, B-ben a BC egyenesre. Ezek az egyenesek metszik egymást, hiszen az AC, BC egyenesek is metszik egymást. Jelöljük a metszéspontot F-fel.



3. ábra

Thalész tétele szerint F az ABC háromszög köré írható k körben a C-vel átellenes pont. Ha az F-et meghatározó egyeneseket az AB szakasz O_2 felezőpontjára tükrözzük, definíciójuk szerint az ABC háromszög A-n, B-n átmenő magasságvonalait kapjuk. Tehát F-nek O_2-re vonatkozó tükörképe az ABC háromszög M magasságpontja. (Más szavakkal elmondva ugyanezt), azt kapjuk, hogy k-nak az AB szakasz O_2 felezőpontjára vonatkozó tükörképe átmegy M-en. Mivel AB a k húrja, ez utóbbi tükrözés eredménye nem változik meg, ha magára az AB szakaszra tükrözünk.

Ismét fordítva egyet az állításunkon, azt kapjuk, hogy M-nek az AB-re vonatkozó tükörképe is rajta van k-n. Mivel ebben az állításban az AB oldalnak nincs kitüntetett szerepe, alkalmazhatjuk az AC, BC oldalakra is. Jelöljük a kapott tükörképeket E-vel, D-vel. Ezekből, a CF szakasz derékszög alatt látszik, hiszen CF a k átmérője. Mivel a C, D, E, F pontokat M-mel összekötő szakaszok felezőpontja épp az O_1, A_1, B_1, O_2 pont lesz, ezzel beláttuk, hogy az O_1O_2 szakasz az A_1, B_1 pontokból valóban derékszög alatt látszik.

Megjegyzés: A III. megoldásban nem használtuk fel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. A megoldás során az ABC háromszög köré írt k kört az M centrumból felére kicsinyítettük. Láttuk, hogy az új körön rajta vannak az eredeti háromszög oldalfelező pontjai, magasságvonalának a talppontjai, és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai. Ez az ún. Feuerbach-kör, amelyet a k-ból általában az ABC háromszög S centrumára vonatkozó hasonlósággal szokás előállítani.