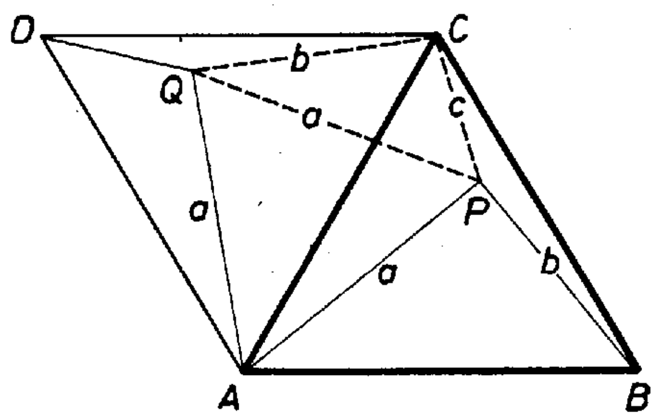
Legyen ABC a keresett háromszög, és jelöljük P-nek az egyes csúcsoktól mért távolságát a megfelelő kisbetűvel. Az ABC háromszög a P körül szabadon forgatható, és tetszőleges, a P-n átmenő tengelyre tükrözhető, hiszen ezek a transzformációk az ABC háromszög szabályosságát és a csúcsok P-től mért távolságait változatlanul hagyják. Válasszuk az ABC háromszög körüljárását pozitívnak és forgassuk el $60°$-kal a háromszöget és benne a P pontot A körül. Ez a forgatás B-t C-be viszi, C és P új helyzetét jelöljük D-vel, illetve Q-val. A forgatás miatt $CQ = BP$, és az APQ háromszög szabályos. Tehát a CPQ háromszög oldalai rendre egyenlőek az adott szakaszokkal:



$CP = c$, $CQ = b$, $PQ = a$. Mivel olyan háromszöget keresünk, amelyikben P belső pont, az a, b, c oldalakkal megszerkesztett háromszög csak akkor ad megoldást, ha a szögei kisebbek $120°$-nál, hiszen a PCQ szög benne van a $120°$-os BCD szögben, a QPC, PQC szögeket pedig úgy kapjuk a $180°$-nál kisebb APC, AQC szögekből, hogy elvesszük belőle a $60°$-os APQ, AQP szögeket.

A szerkesztés menete tehát a következő. Szabadon megválaszthatjuk a P-től c távolságra levő C pontot és a PC szakasz valamelyik oldalán megszerkesztjük a P középpontú a sugarú és C középpontú, b sugarú körök Q metszéspontját. A keresett háromszög csak akkor létezik, ha a PQC háromszög létrejön, és szögei $120°$-nál kisebbek. Ha ez így van, a PQ szakasz C-vel átellenes oldalára rajzolt PQA szabályos háromszög harmadik csúcsa a keresett háromszög következő csúcsa, és B-t az az A körüli $60°$-os forgatás adja C-ből, amelyik Q-t P-be viszi. A forgatás miatt ABC valóban szabályos háromszög. Mivel a PQC háromszög szögei $120°$-nál kisebbek, A a PCQ szögtartományban van, az AC és PQ szakaszok metszik egymást. Így a Q-t P-be vivő forgatás C-t túlforgatja az AP irányon, P benne lesz a BAC szögtartományban. Az APC, $APB = AQC$ szögek kisebbek $180°$-nál, és az összegük

$$APC\sphericalangle + APB\sphericalangle = APQ\sphericalangle + QPC\sphericalangle + AQP\sphericalangle + PQC\sphericalangle =$$
$$= 120° + 180° - PCQ\sphericalangle$$

miatt nagyobb $180°$-nál, hiszen a PCQ szög kisebb $120°$-nál. Tehát a PBC szög kisebb $180°$-nál, P valóban belső pontja az ABC háromszögnek. A csúcsoktól mért távolsága pedig rendre egyenlő, az adott szakaszokkal, hiszen $PA = PQ$, $PB = CQ$ a szerkesztés miatt.

Megjegyzések. **1.** A cosinus tétel alapján látható, hogy ha az adott a, b, c szakaszok közül mondjuk a c a legnagyobb, akkor a szerkeszthetőség feltétele

$$c^2 < a^2 + ab + b^2.$$

2. Megoldhatjuk úgy is a feladatot, hogy felveszünk egy a keresett ABC háromszöghöz hasonló tetszőleges szabályos $A'B'C'$ háromszöget, és benne a P-hez hasonló helyzetű P' pontot keressük az

$$A'P' : B'P' = a : b, \qquad B'P' : C'P' = b : c$$

arányoknak megfelelő Apolloniusz–körök metszéseként. Aztán alkalmas hasonlósággal az egészet átépítjük a P pont köré.

3. Ha nem kötjük ki azt, hogy P az ABC háromszög belső pontja legyen, az eredeti szerkesztés során A helyett a PQ-ra vonatkozó tükörképét is vehetjük. Ebben az esetben csak az a szerkeszthetőség feltétele, hogy az adott a, b, c szakaszokkal háromszög legyen szerkeszthető, és általában két, különböző méretű ABC háromszöget kapunk.