I. megoldás. Ha a, b és c mindegyike 0, akkor az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek minden valós szám gyöke, így az állítás ekkor teljesül. Föltehető tehát, hogy a három szám közül legalább kettő különbözik 0-tól. (Pontosan két 0 a feltétel szerint nem lehet.)

Ha $a=0$, akkor a feltétel szerint most $0 \neq b=-2c$, így egyenletünk

$$c(-2x+1)=0 \quad \text{alakú.}$$

Ennek az $\frac{1}{2}$ gyöke, tehát az állítás az $a=0$ esetben is teljesül.

Ha $a \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú.

A feltétel szerint $2a=-3(b+2c)$, tehát az egyenlet diszkriminánsa

$$D=b^2-4ac=b^2+6c(b+2c)=(b+3c)^2+3c^2$$

ami pozitív, hisz b és c egyszerre nem 0.

Egyenletünknek tehát két különböző valós gyöke van. Ezeket x_1-gyel és x_2-vel jelölve a gyökök és együtthatók ismert összefüggése szerint

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Most $a \neq 0$, így a feltétel mindkét oldalát a-val osztva

$$0=2+3\frac{b}{a}+6\frac{c}{a}=2+3(-x_1-x_2)+6x_1x_2$$

adódik. Innen rendezés után kapjuk, hogy

$$3x_1-2=3x_2(2x_1-1).$$

Másrészt, ha $x_1=\frac{1}{2}$, akkor a feladat állítása nyilván teljesül.

Ha $x_1 \neq \frac{1}{2}$, akkor $x_2=\dfrac{3x_1-2}{3(2x_1-1)}$.

Látható, hogy x_2 pontosan akkor nem esik az adott intervallumba, azaz $x_2 \notin (0,1)$ pontosan akkor teljesül, ha $x_2(x_2-1) \geq 0$. Ez az x_1-re azt jelenti, hogy

$$\frac{3x_1-2}{3(2x_1-1)} \cdot \frac{1-3x_1}{3(2x_1-1)} \geq 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $(3x_1-2)(1-3x_1) \geq 0$, azaz $\frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}$.

Azt kaptuk tehát, hogy ha x_2 nem esik 0 és 1 közé, akkor x_1 az $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ között van, tehát az állítás most is igaz.

II. megoldás. Jelöljük az ax^2+bx+c polinomot $p(x)$-szel. Ekkor

$$p(0)=c, \quad p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c, \quad p(1)=a+b+c.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $2a+3b+6c=p(0)+4p\left(\frac{1}{2}\right)+p(1)$.

A feltétel szerint így $p(0)+4p\left(\frac{1}{2}\right)+p(1)=0$. Ez azt jelenti, hogy vagy $p(0)$, $p\left(\frac{1}{2}\right)$ és $p(1)$ mindegyike 0, vagy pedig e három szám között van pozitív is és negatív is.

Az első esetben $p\left(\frac{1}{2}\right)=0$, tehát $p(x)$-nek gyöke az $\frac{1}{2}$.

A második esetben a helyettesítési értékek között vannak ellenkező előjelűek, van tehát olyan t_1, és t_2, melyekre $0 \leq t_1 \leq t_2 < 1$, úgy hogy $p(t_1)$ és $p(t_2)$ ellenkező előjelűek. Ismeretes, hogy első- vagy másodfokú $p(x)$ polinom esetén ebből következik, hogy van olyan x_0, melyre $t_1 < x_0 < t_2$ és $p(x_0)=0$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Az ax^2+bx+c függvény 0 és 1 közötti integrálja a $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$.

A feltevés szerint ez 0-val egyenlő.

Ebből is látható, hogy van a függvénynek 0 és 1 közti gyöke.