I. Megoldás. Definíció szerint $[x]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, amely x-nél nem nagyobb. Az x törtrésze a szokásos jelölés szerint

$$\{x\} = x - [x].$$

Ily módon az egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$\big[5[x]+5\{x\}\big] \geqq \big[[x]+\{x\}\big] + \frac{\big[2[x]+2\{x\}\big]}{2} + \ldots + \frac{\big[5[x]+5\{x\}\big]}{5}.$$

Felhasználva, hogy egész a esetén $[n+t]=n+[t]$, tovább alakíthatunk:

$$5[x] + \big[5\{x\}\big] \geqq [x] + \big[\{x\}\big] + \frac{2[x]}{2} + \frac{2[\{x\}]}{2} + \ldots + \frac{5[x]}{5} + \frac{\big[5\{x\}\big]}{5},$$

$$\big[5\{x\}\big] \geqq \big[\{x\}\big] + \frac{\big[2\{x\}\big]}{2} + \frac{\big[3\{x\}\big]}{3} + \frac{\big[4\{x\}\big]}{4} + \frac{\big[5\{x\}\big]}{5}.$$

Most négy esetet vizsgálunk:

1. Ha $0 \leqq \{x\} < \frac{1}{5}$, akkor $\big[\{x\}\big] + \ldots + \frac{\big[5\{x\}\big]}{5} = 0 = [\{5x\}]$;
2. Ha $\frac{1}{5} \leqq \{x\} < \frac{2}{5}$, akkor $\big[\{x\}\big] + \ldots + \frac{\big[5\{x\}\big]}{5} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < \big[5\{x\}\big] = 1$;
3. Ha $\frac{2}{5} \leqq \{x\} < \frac{3}{5}$, akkor $\big[\{x\}\big] + \ldots + \frac{\big[5\{x\}\big]}{5} \leqq$
   $\leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} = 1\frac{11}{15} < \big[5\{x\}\big] = 2$;
4. Ha $\frac{3}{5} \leqq \{x\} < 1$, akkor $\big[\{x\}\big] + \ldots + \frac{\big[5\{x\}\big]}{5} \leqq$
   $\leqq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 2\frac{43}{60} < 3 \leqq \big[5\{x\}\big]$;

azt kapjuk tehát, hogy az egyenlőtlenségnek minden valós x megoldása.

II. megoldás. Könnyen belátható, hogy minden (a,b) valós számpár esetén $[a]+[b] \leqq [a+b]$
Ezt többször alkalmazva kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned}120[5x] &= 24[5x]+30[5x]+20[5x]+20[5x]+15[5x]++10[5x]+[5x] \geqq\\ &\geqq 24[5x]+30\big([4x]+[x]\big)+20\big([3x]+[2x]\big)+20\big([3x]+[x]+[x]\big)+15\big([2x]+\\ &+[2x]+[x]\big)+10\big([2x]+[x]+[x]+[x]\big)+\big([x]+[x]+[x]+[x]+[x]\big)=\\ &=120[x]+60[2x]+40[3x]+30[4x]+24[5x],\end{aligned}$$

Azaz minden valós x-re

$$120[5x] \geq 120[x]+60[2x]+40[3x]+30[4x]+24[5x].$$

Ezt 120-szal osztva kapjuk a feladat egyenlőtlenségét, ami azt jelenti, hogy minden valós szám megoldása az egyenlőtlenségnek.

Gaál Zsolt és *Mályusz Levente* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. II. o. tanulók)
ötlete alapján