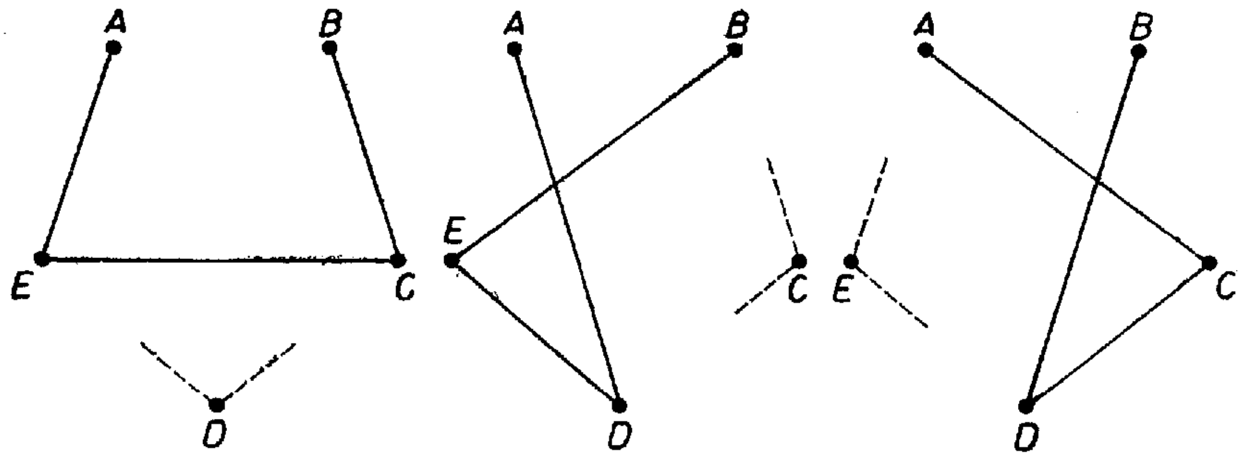
Jelölje a csúcsokat rendre A, B, C, D, E, a melléjük írt számokat pedig ugyanebben a sorrendben a, b, c, d és e.

Három összeg egész voltáról nincs még tudomásunk, feltehető, hogy ezek egyike az AB élre írt $(a+b)$. Megmutatjuk, hogy $(a+b)$ is egész.

Az ötszög AB élén kívüli többi élt és átlót soroljuk három darab hármas csoportba úgy, hogy az egyes csoportokba kerülő élek mentén, minden élen egyszer haladva át, A-ból B-be jussunk. Ez a felosztás látható az ábrán.



Mivel a kilenc él közül csak 2-ről nem tudjuk, hogy egész szám áll-e rajta, így van olyan élsorozat, amelynek mindhárom élére egész számot írtunk. Legyen ez például az AD, DE, EB. Ez azt jelenti, hogy az $(a+d)$, $(d+e)$, $(e+b)$ összegek egészek. Egész számok összege és különbsége is egész, így $a+b==(a+d)+(e+b)-(d+e)$ valóban egész szám.

A bizonyítás alkalmas betűzéssel a kérdéses három él bármelyikére elmondható, így az állítást igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Az nem igaz, hogy maguk a számok is egészek, hisz nyilván megfelelő kitöltést kapunk, ha minden csúcshoz $\frac{1}{2}$-et írunk. Könnyen látható azonban, hogy minden szám kétszerese egész, hisz pl. $2a=(a+b)+(a+c)-(b+c)$.

2. Ha csak hat összegről tudjuk, hogy egész, akkor lehetséges, hogy a továbbiak nem azok. Ilyen kitöltést kapunk, ha egy csúcsra törtszámot, a további négyre pedig egész számot írunk.