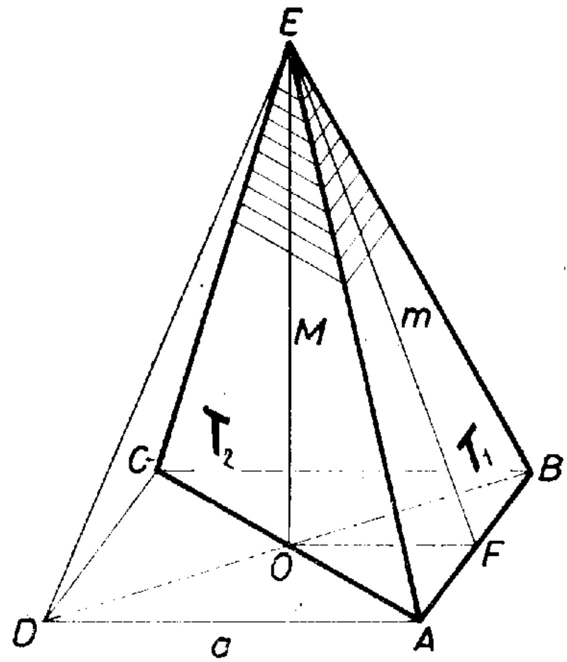
Jelöljük a gúla alapélének hosszát a-val, magasságát M-mel, az ABE háromszög a oldalához tartozó magasságvonalának hosszát m-mel. Tudjuk, hogy a gúla térfogata

$$V = \frac{a^2 M}{3}. \tag{1}$$

Az ABE háromszög területe $T_1 = \frac{am}{2}$. Az ACE háromszög nyilván egyenlő szárú, és alapjának hossza az alapnégyzet átlója, azaz $a\sqrt{2}$. Mivel a gúla szabályos, magassága az alapot az átlók metszéspontjában, O-ban metszi, ezért ez egyben az ACE háromszögnek is magassága. Az ACE háromszög területe így $T_2 = \frac{aM}{\sqrt{2}}$.



Feladatunk a gúla térfogatát úgy felírni, hogy abban csak az ismert T_1 és T_2 értékek szerepeljenek. Ezért alakítsuk át először az (1) kifejezést:

$$V = \frac{a^2 M}{3} = \frac{aM}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot T_2 \cdot a. \tag{2}$$

Már csak a-t kell kifejeznünk T_1 és T_2-vel. Ehhez egyrészt

$$T_1 T_2 = \frac{a^2 m M}{2\sqrt{2}} \quad \text{ebből} \quad (3) \quad mM = \frac{2\sqrt{2} T_1 T_2}{a^2}$$

másrészt

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{\sqrt{2} M}, \quad \text{innen} \quad (4) \quad \frac{m}{M} = \sqrt{2}\frac{T_1}{T_2}.$$

(3) és (4) szorzatából illetve hányadosából

$$m^2 = \frac{4T_1^2}{a^2}, \quad \text{illetőleg} \quad M^2 = \frac{2T_2^2}{a^2}$$

Az FEO derékszögű háromszögre felírhatjuk Pitagorasz tételét

$$\frac{a^2}{4} = m^2 - M^2 = \frac{4T_1^2}{a^2} - \frac{2T_2^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}(4T_1^2 - 2T_2^2)$$

ahonnan átrendezéssel kapjuk, hogy

$$a = \sqrt[4]{16T_1^2 - 8T_2^2}$$

ezt behelyettesítve (2)-be

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot T_2 \sqrt[4]{16T_1^2 - 8T_2^2}.$$

Megjegyzések. 1. A beküldők egy része nem értette meg a feladat követelményét, hogy a térfogatot úgy kell felírni, hogy abban csak a két háromszög területe szerepeljen, mint ismert adat. Ezért számos olyan „végképlettel" találkozhattunk, amelyben más adatok is szerepeltek, pl. a gúla magassága vagy alapéle.

2. Szabályos n oldalú gúlán olyan gúlát értünk, amelynek alaplapja szabályos n szög. Az ilyen gúla természetesen mindig egyenes gúla.