**I. megoldás**. A feltétel szerint $ac+bd=2ab$, ahonnan rendezés után

$$ac-ab=ab-bd$$

adódik. Szorzattá alakítva

$$a(c-b)=b(a-d).$$

Két egyenlő szám szorzata nem lehet negatív, tehát

$$0\le ab(c-b)(a-d)=ac+bd-ab-cd=1-cd,$$

ahonnan $cd\le 1$, amivel az állítást igazoltuk.

A fentiekből az is kiolvasható, hogy az adott feltételek mellett $cd$ értéke csak akkor 1, ha $c=b$ vagy $a=d$.

**II. megoldás.** Az első feltételből adódó $b=\dfrac{1}{a}$ összefüggést a második egyenlőségbe helyettesítve, majd $a$-val szorozva kapjuk, hogy

$$ca^2+d=2a, \qquad \text{tehát a}$$
$$cx^2-2x+d=0$$

egyenletnek az $a$ megoldása (mivel $ab=1,\ a\ne 0$, így oszthattunk vele).

Ha $c=0$, akkor a bizonyítandó állítás nyilván igaz. Ha $c\ne 0$, akkor a fenti egyenlet másodfokú, így abból, hogy létezik megoldása, következik, hogy a diszkriminánsa nem negatív, tehát $4-4cd\ge 0$, ahonnan 4-gyel való osztás és rendezés után a bizonyítandó állítás következik.

**III. megoldás.** Mivel $ab$ pozitív, $a$ és $b$ egyező előjelűek. Ha $c$ és $d$ előjele különbözik vagy valamelyikük 0, akkor $cd$ negatív vagy 0, tehát kisebb 1-nél. Emiatt a továbbiakban feltehetjük, hogy $c$ és $d$ előjele megegyezik. Az is könnyen látható, hogy $c,\ d$ közös előjelének meg kell egyeznie $a$ és $b$ előjelével, mivel ellenkező esetben $ac$ és $bd$ negatív vagy 0 lenne, pedig $ac+bd=2$.

Tehát $a$, $b$, $c$, $d$ előjele megegyezik. Így $ac$, $bd$, $cd$, $ab$ szorzatok mind pozitívak. Ekkor $ac$ és $bd$ mértani közepe nem lehet nagyobb a számtani közepénél, tehát

$$\sqrt{abcd}\le\frac{ac+bd}{2}=1,$$

innen $ab=1$ miatt $\sqrt{cd}\le 1$ és $cd>0$ miatt $cd\le 1$ adódik.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$ac=bd=1, \qquad \text{azaz} \qquad a=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=d.$$

**(K. G.)**