Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$1 - |\,x+1\,| = \frac{[\,x\,] - x}{|\,x-1\,|}. \tag{1}$$

I. megoldás. A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x \neq 1$. A továbbiakban három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az egyes abszolút érték jelek hogyan bonthatók fel.

Ha $x > 1$, akkor $|x+1| = x+1$, $|x-1| = x-1$, és rendezés után (1) így alakul:

$$[x] = 2x - x^2. \tag{1a}$$

Mivel $x > 1$, ezért $[x] \geq 1$ is teljesül, így (1a) szerint $2x - x^2 \geq 1$, ahonnan rendezés után $(x-1)^2 \leq 0$ adódik. Ez csak akkor teljesül, ha $x = 1$, amit viszont kizártunk.

Ha $-1 \leq x < 1$, akkor $|x+1| = x+1$, $|x-1| = 1-x$, így most az

$$[x] = x^2 \tag{1b}$$

egyenletet kapjuk. Az adott intervallumban $[x]$ értéke -1, vagy 0, így csak $x^2 = 0$ lehetséges, hiszen x^2 nem lehet negatív. Ekkor $x = 0$, ami valóban megoldása (1)-nek.

Ha $x < -1$, akkor $|x+1| = -(x+1)$, $|x-1| = 1-x$, tehát most

$$[x] = 2 - x^2 \tag{1c}$$

adódik.

Mivel $[x] > x - 1$, ezért (1c)-ből $x - 1 < 2 - x^2$, ahonnan $x < -1$ miatt $x > -\dfrac{\sqrt{13}+1}{2} > -3$. Így $[x]$ szóba jövő értékei -2, vagy -3.

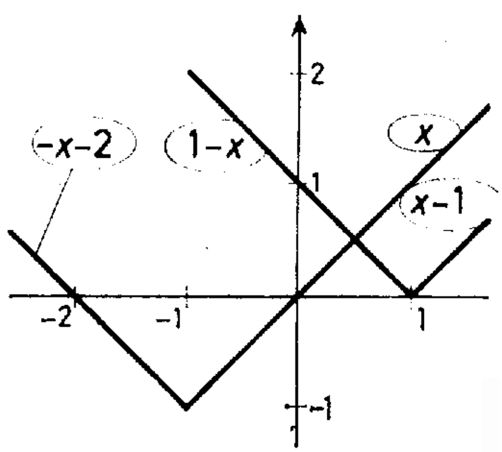
Ha $[x] = -2$, akkor (1c) alapján $x = -2$, amelyre valamennyi feltétel teljesül, ha pedig $[x] = -3$, akkor $x = -\sqrt{5}$, ami ugyancsak megoldás.

Így egyenletünknek három megoldása van. Ezek: $-\sqrt{5}$, -2 és 0.

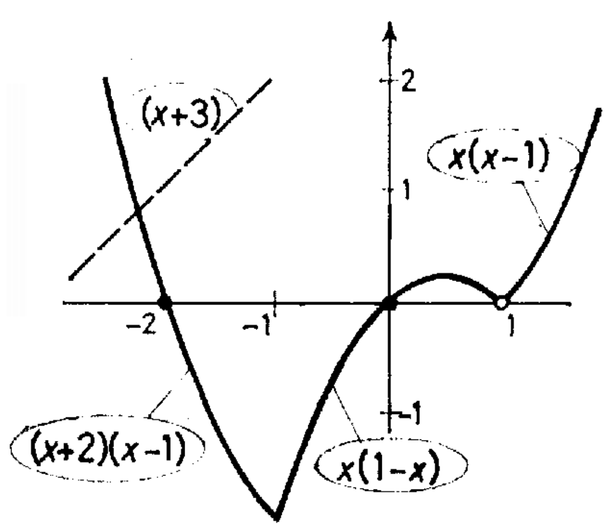
II. megoldás. Szorozzuk meg (1) mindkét oldalát $-|x-1|$-gyel, és ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a kapott

$$|x-1|\big(|x+1| - 1\big) = x - [x] \tag{2}$$

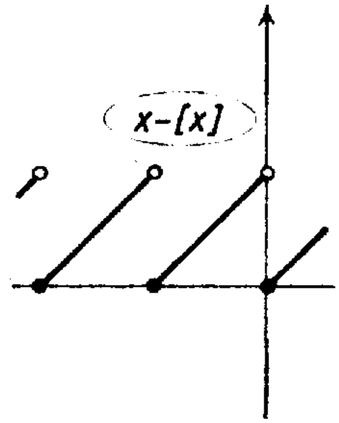
egyenlet két oldalán álló függvényeket.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A bal oldalon álló szorzat első tényezője $x \leq -1$ mellett $(-x-2)$-vel, $x > -1$ mellett x-szel egyenlő, a második tényező $x \leq 1$ mellett $(1-x)$-szel, $x > 1$ mellett $(x-1)$-gyel egyenlő (1. ábra). Így a bal oldal értéke rendre (2. ábra)

$$(x+2)(x-1), \qquad x(1-x), \qquad \text{vagy} \qquad x(x-1)$$

aszerint, hogy

$$x \leq -2, \qquad x \leq 1, \qquad \text{vagy} \qquad x > 1.$$

A jobb oldalon álló függvényt x tört részének hívják, és értéke tetszőleges x mellett 0 és 1 között van, hiszen $[x]$ nem lehet nagyobb x-nél, és nem lehet kisebb $(x-1)$-nél (3. ábra). Emiatt x értékét $(-\infty)$ felől növelve először -3 és -2 között lehet egyenlő a két függvény értéke, hiszen $x < -3$ mellett $x+2 < < -1$, $x-1 < -4$, így $(x+2)(x-1) > 4$. Ha $-3 \leq x < -2$, akkor $[x] = -3$, tehát (2) ekvivalens az

$$(x+2)(x-1) = x+3$$

egyenlettel, amiből a műveletek elvégzése után az $x^2 = 5$ egyenletet kapjuk. Ennek az adott szakaszon $x = -\sqrt{5}$ a gyöke, ami (1)-nek is gyöke. Tovább menve $x = -2$ is gyök, viszont $-2 < x < 0$ mellett a bal oldal értéke negatív, tehát ezen a szakaszon nincs gyök. A szakasz $x = 0$ végpontja ismét gyök, és $0 < x < 1$ mellett a bal oldal értéke kisebb x-nél, így itt nincs további gyök. Az $x = 1$ végpont (2)-nek ugyan gyöke, de (1)-nek nem. További gyök nincs, mert $x > 1$ mellett a bal oldal értéke nagyobb $(x-1)$-nél, és ez nagyobb a jobb oldal értékénél.