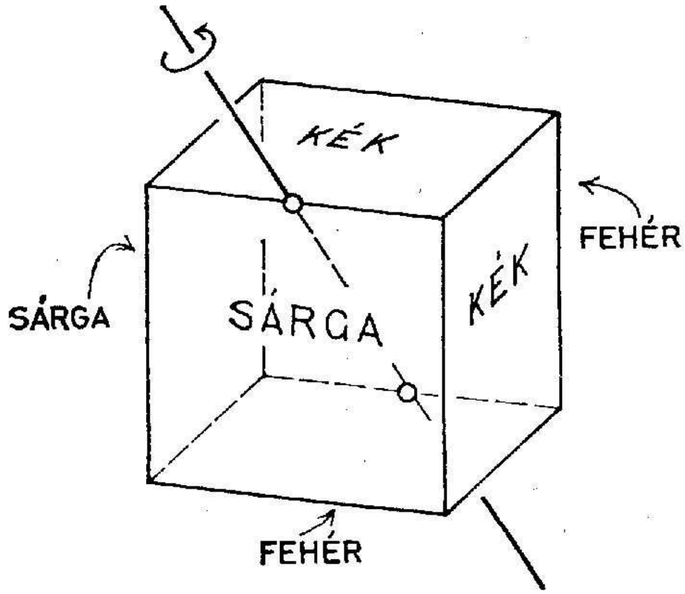
I. megoldás. Ha csak a fehér lapok kölcsönös helyzetét vesszük figyelembe, akkor két eset lehetséges: a fehér lapok vagy szemköztiek, vagy szomszédosak. Tartsuk az első esetben a kockát magunk elé úgy, hogy a fehér lapok vízszintesek legyenek. A négy függőleges lap megfestésére ismét két lehetőségünk van, hiszen a kékre festett lapok is vagy szemköztiek, vagy szomszédosak lehetnek. Mindkét választás már egyértelműen meghatározza a kocka színezését, hiszen a kockát a függőleges tengelye körül mindig elforgathatjuk úgy, hogy az egyik kék lapja elénk kerüljön, és ha szomszédos lapok kékek, akkor a másik kék lapja ettől jobbra legyen.

Ha a fehér lapok szomszédosak, akkor tartsuk úgy a kockát, hogy az egyik fehér lap alulra, a másik hátulra kerüljön.



Most a felső és az első lap színét is kétféleképpen választhatjuk meg. Megmutatjuk, hogy az így kapott négy eset mindegyikének pontosan egy színezés felel meg. Ha a felső és az első lap egyszínű, ez nyilvánvaló, hiszen ekkor a még fel nem használt szín a két oldalsó lapra kerül. Ha azonban a felső és az első lap különböző színű, kétféle probléma is felmerül. Gondolhatjuk azt, hogy miután ezeket a lapokat valahogy megfestettük, mondjuk a felsőt kékre, és az elsőt sárgára, még mindig két lehetőségünk van aszerint, hogy a másik kék lapot a kocka bal vagy jobb oldali lapjának választjuk-e. De gondolhatunk arra is, hogy ha a felső és az első lapok színét felcseréljük, valójában nem kapunk új esetet, hiszen ez a változtatás az első-felső és az alsó-hátsó élek felezőpontján átmenő egyenes körüli 180°-os forgatással is elérhető.

Ez a forgatás a két fehér lapot egymásba viszi, a felső kék lapot az első sárga lappal felcseréli, és ugyancsak felcseréli a két oldallapot. Szerencsére ez a két gond éppen közömbösíti egymást, hiszen a mondott forgatással mindig elérhető, hogy például a jobb oldali lap legyen kék, és ha csak ezután választjuk meg, hogy az első vagy a felső lap legyen-e kék, akkor valóban két különböző festést kapunk.

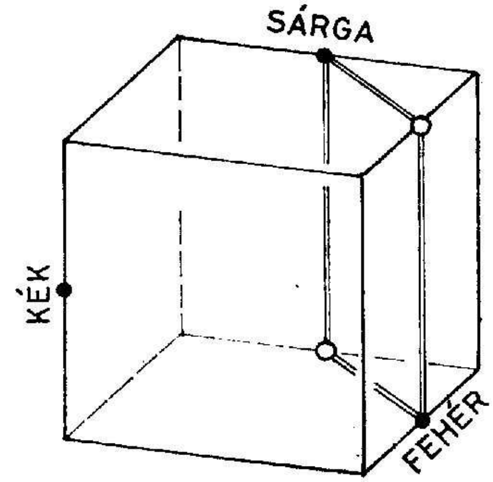
Tehát a lehetséges színezések száma $2 + 4 = 6$.

II. megoldás. A kocka két lapjának a kölcsönös helyzete kétféle lehet: a kockán a lapok vagy párhuzamosak egymással, vagy merőlegesek egymásra. Pusztán logikailag tehát nyolc eset lehetséges aszerint, hogy a három színhez tartozó lappárok kölcsönös helyzete milyen. Ezek közül azonban három nem valósítható meg, hiszen ha a kocka két-két párhuzamos oldalpárját már két színnel megszíneztük, a harmadik színnel csak a még színezetlen párhuzamos lappárt festhetjük be.

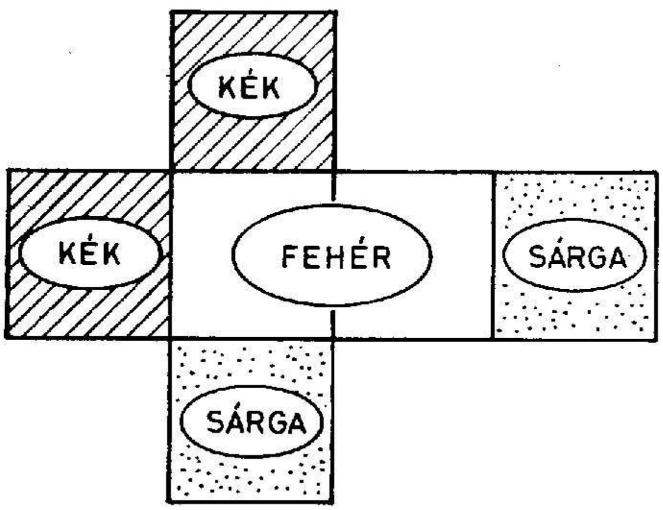
Ha mindhárom színnel párhuzamos lapokat akarunk befesteni, az egyértelműen végrehajtható, hiszen minden így megszínezett kocka, tartható úgy, hogy a fehér lapjai vízszintesek legyenek, és a kék lapok kerüljenek oldalra. Ugyancsak egyértelműek azok a színezések, amelyekben az egyik színhez párhuzamos, a többihez merőleges lapok tartoznak. Ezek ugyanis mind tarthatóak úgy, hogy az egyszínű párhuzamos lapok legyenek vízszintesek, és a másik két szín közül mondjuk az kerüljön az első és a jobb oldali lapra, amelyik neve előbb áll az ábécében.

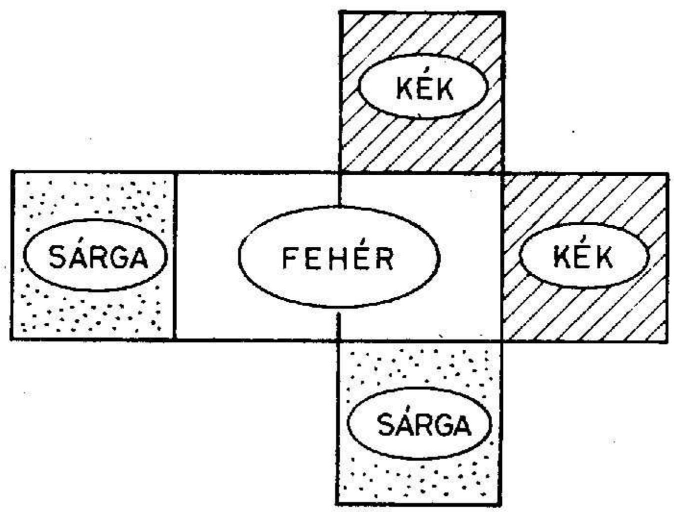
FEHÉR	P	P	P	P	M	M	M	M
KÉK	P	P	M	M	P	P	M	M
SÁRGA	P	M	P	M	P	M	P	M
A valódi esetek száma	1	–	–	1	–	1	1	2

Meg kell még vizsgálnunk, hányféleképpen színezhetjük meg a kockát három színnel úgy, hogy a színek mindegyikével két-két szomszédos lapot fessünk be.



Mondjuk azt ilyenkor, hogy azt az élt is megfestjük, amelyben az egyszínű élek csatlakoznak egymáshoz. Az így megfestett élek nem lehetnek párhuzamosak, hiszen ekkor a hozzájuk tartozó lapok is párhuzamosak volnának, és a harmadik színre csak a rájuk merőleges, egymással párhuzamos két lap maradna. Nem is csatlakozhatnak egymáshoz a megfestett élek, hiszen akkor azt a lapot, amelyiken mindkettő rajta van, mindkettő színével meg kellene festeni. Végül is azt kaptuk, hogy a megfestett élek csak kitérőek lehetnek.





Ha már a kocka valamelyik élét kékre festettük, a másik két színnel csak az ehhez képest kitérően elhelyezkedő négy él közül festhetjük ki a kocka valamelyik két, egymáshoz képest is kitérő élét. Most aszerint kapunk két különböző esetet, hogy melyik kettőt festjük meg, hiszen az egyik szemközti pár nem vihető át a másikba elmozgatással; de bármelyik szemközti pár tagjai átvihetők egymásba úgy, hogy közben a kék él a helyén marad.

Most tehát két különböző színezést kaptunk, így a korábbi $1 + 3$ esettel együtt összesen 6 különböző eset van.

Megjegyzés. A beérkezett dolgozatok között nagyon sok volt, amelyik nem tett különbséget az egyszínű szomszédos lapok két különböző megválasztása között. Ezért mutatjuk be az ábrán látható hálózatokat, hogy akikben még mindig maradtak kétségek a két eset különbözőségét illetően, azok összehajtogatás után maguk győződhessenek meg arról. Ezeket a dolgozatokat (kis jóindulattal) hiányosnak minősítettük, mondván, hogy „csak” 5 esetet találtak meg.