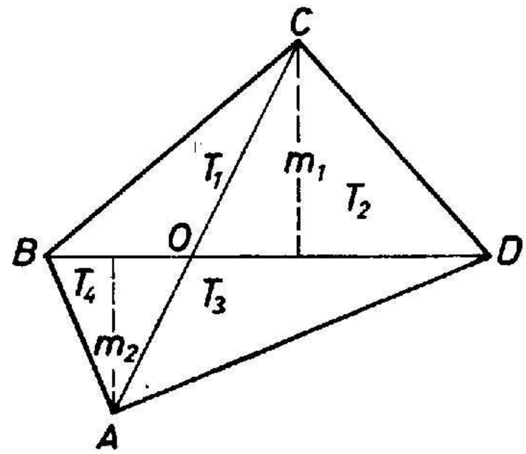
Mivel az $ABCD$ négyszög konvex, tartalmazza az átlóinak O metszéspontját. Így a négyszög T területét a BOC, COD, DOA, AOB részháromszögek T_1, T_2, T_3, T_4 területének összege adja.



Fejezzük ki a területeket a $DB = DO + OB$ átló és a megfelelő magasságok segítségével.

$$T_1 = \frac{OB \cdot m_1}{2}, \quad T_2 = \frac{OD \cdot m_1}{2}, \quad T_3 = \frac{OD \cdot m_2}{2}, \quad T_4 = \frac{OB \cdot m_2}{2}.$$

Vegyük észre, hogy $T_1T_3 = T_2T_4$, vagyis

$$T_4 = \frac{T_1T_3}{T_2}. \tag{1}$$

Legyen T_4 az ismeretlen terület, akkor a másik három terület értékéről annyit tudunk, hogy a 24 cm^2, ill. 25 cm^2 valamelyike. Keressük a $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ összeg maximális értékét. Azt gondolnánk, ez akkor a legnagyobb, ha a T_1, T_2, T_3 mindegyikét 25 cm^2-nek választjuk. Ekkor (1) miatt

$$T_4 = \frac{T_1T_3}{T_2} = \frac{25 \cdot 25}{5} = 25\text{cm}^2, \qquad \text{és így}$$

$T = 100$ cm^2 adódna.

Valójában nem ez a legnagyobb érték. Ez rögtön kiderül, ha megvizsgáljuk, mikor lesz legnagyobb az (1) tört. Nyilván akkor, ha a számlálója a lehető legnagyobb és ugyanakkor a nevezője a lehető legkisebb, azaz ha $T_1 = T_3 = 25$ cm^2 és $T_2 = 24$ cm^2.

Ekkor $T_4 = \dfrac{25 \cdot 25}{24} = 26\dfrac{1}{24}$ cm^2 és $T = 25 + 24 + 25 + 26\dfrac{1}{24} = 100\dfrac{1}{24} >> 100$ cm^2.

Megmutatjuk, hogy ez T lehető legnagyobb értéke. Mivel $T_1 \leq 25$ cm^2, $T_3 \leq 25$ cm^2, ezért $T_1 + T_3 \leq 50$ cm^2, és $T_1 \cdot T_3 \leq W = 625$ cm^4. Tehát

$$T \leq 50\ \text{cm}^2 \left(T_2 + \frac{W}{T_2}\right).$$

Itt T_2-nek két lehetséges értéke van. Mindkettő mellett kiszámoltuk már a jobb oldal értékét, és láttuk, hogy az $T_2 = 24$ cm^2 mellett nagyobb a $T_2 = 25$ cm^2-hez tartozó értéknél.

F. G.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy a maximális területű négyszög trapéz. Ugyanis ha $T_1 = T_3 = 25$ cm^2, akkor $T_{ACD} = T_{BCD}$. Mivel $ACD_\triangle$ és $BCD_\triangle$ alapja, DC azonos, és területük egyenlő, a magasságuknak is meg kell egyeznie. Ez viszont azt jelenti, hogy $AB \parallel DC$, vagyis a négyszög trapéz.

2. Nagyon sok megoldó az $\dfrac{1}{24}$ törtet átírta tizedestört alakra és a 0,0416 tört értékét lekerekítette 0,041 vagy 0,04 értékre. Ilyenkor szigorúan véve „a legfeljebb mekkora ... ?” kérdésre nem adtak helyes választ!