Az első két tag összege négyzetszám, ugyanis $2^8+2^{11}=2^8(1+2^3)=2^8\cdot 9=48^2$. Így ha k olyan egész, melyre $2^8+2^{11}+2^n=k^2$, akkor

$$2^n=k^2-48^2=(k-48)(k+48).$$

Föltehető, hogy k pozitív, ekkor a jobb oldalon pozitív egészek szorzata áll. Ha ez a szorzat 2-hatvány, akkor a tényezők is 2 hatványai. Léteznek tehát olyan p és q nem negatív egészek, melyekre $p<q$ és $2^p=k-48$, valamint $2^q=k+48$.

A most kapott egyenletek közül a másodikból az elsőt kivonva

$$2^q-2^p=96,$$

azaz

$$2^p(2^{q-p}-1)=2^5\cdot 3$$

adódik.

Ismeretes, hogy minden pozitív egész szám egyértelműen bontható föl egy páratlan szám és egy természetes kitevőjű 2-hatvány szorzatára. Mivel $q>p$, így $2^{q-p}-1$ páratlan, tehát esetünkben

$$2^p=2^5 \quad \text{és} \quad 2^{q-p}-1=3.$$

Emiatt $p=5$ és $q=7$, tehát

$$2^n=2^p\cdot 2^q=2^{12}.$$

A feladat egyetlen megoldása tehát $n=12$. Ekkor $2^8+2^{11}+2^{12}=80^2$.

U. G.