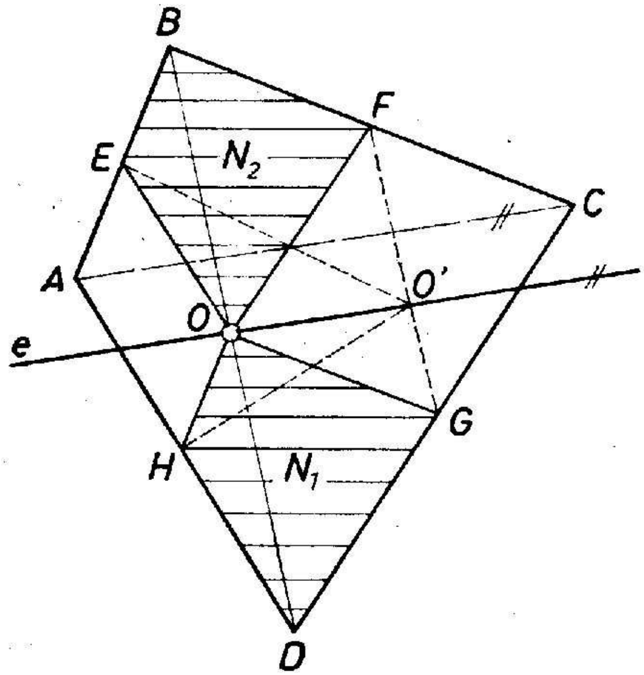
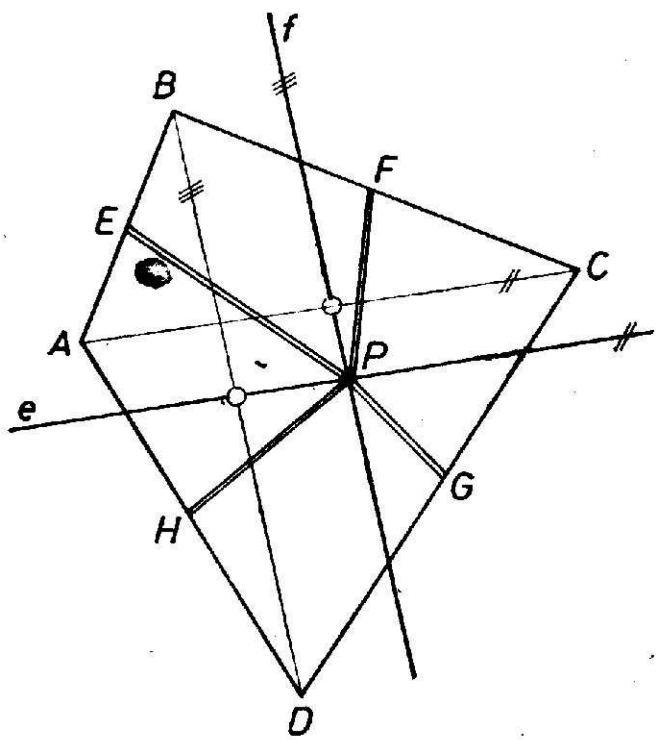
Legyenek az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai rendre E, F, G és H. Húzzuk meg a négyszög valamelyik átlóját, pl. BD-t és ennek O felezőpontján át húzzunk párhuzamost a másik átlóval. Azt állítjuk, hogy ezen e párhuzamos egyenes bármely O pontjára az $N_1 = HOGD$, ill. $N_2 = EOFB$ négyszögek területe negyede az $N = ABCD$ négyszög területének.

A bizonyítást az egyik átlóra mutatjuk meg, a másik átlóra ugyanígy elvégezhető (1. ábra).



1. ábra

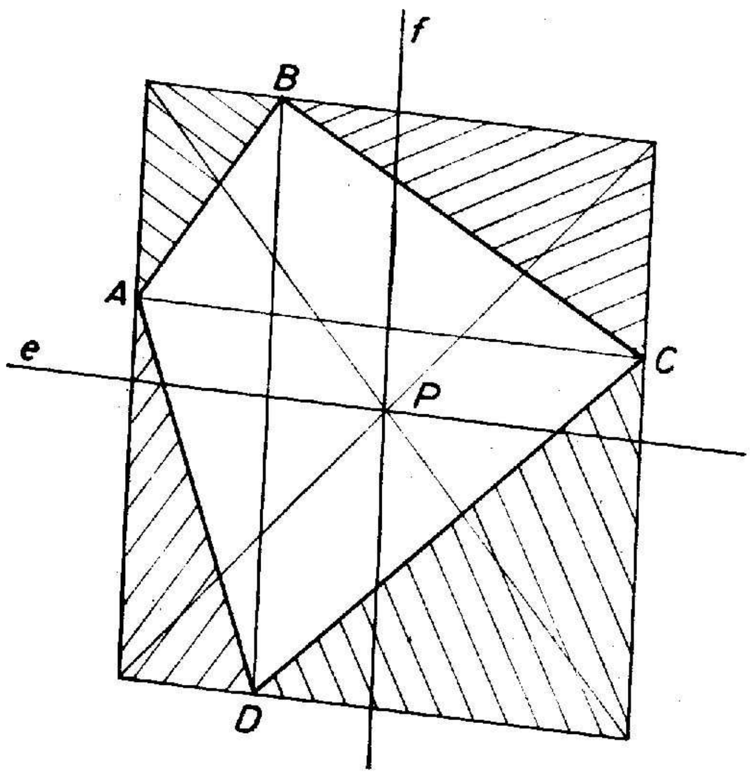


2. ábra

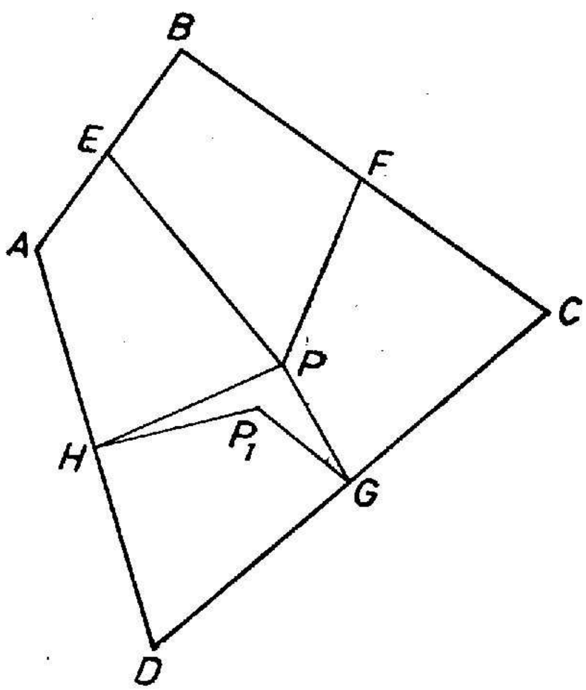
Legyen először O a BD átló és e metszéspontja. Ekkor $OH \parallel AB$ és $OH = \dfrac{1}{2}AB$, ezért DOH háromszög hasonló a DBA háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\dfrac{1}{2}$, amiből $T_{DOH} = \dfrac{1}{4}T_{DBA}$. Ugyanúgy adódik, hogy $T_{DOG} = \dfrac{1}{4}T_{DBC}$ vagyis N_1 területe, valóban negyede az $ABCD$ négyszög területének. Hasonlóan adódik, hogy $N_2 = \dfrac{1}{4}N$. Ha mármost O-t az e egyenesen mozgatjuk, akkor mivel $e \parallel HG$ és $e \parallel EF$, a HOG, ill. EOF háromszögek területe O változtatásával nem változik, és így a $HOGD$, ill. $EOFB$ terület sem.

Ha ezt az eljárást mindkét átlóra elvégezzük, a kapott két párhuzamos, e és f metszéspontja P lesz az a pont, mellyel a felezőpontokat összekötve négy egyenlő területű részt kapunk. (2. ábra). P mindig létrejön és mindig belső pont, ezt a következőképpen láthatjuk be (3. ábra). Húzzunk B és D pontokon át az AC átlóval, az A és C pontokon át a BD átlóval párhuzamost. Így egy paralelogrammát kapunk. Az e és f egyenesek e paralelogramma középvonalai. Metszéspontjuk P, egyben a paralelogramma átlóinak is metszéspontja. Mivel az A és B, B és C (és így tovább) pontok mindig két szomszédos paralelogramma oldalon vannak, az ezen oldalak másik végpontjait összekötő átlónak mindig ugyanazon partjára esnek. Azaz P nem eshet a négyszög oldalai által a paralelogrammából levágott háromszögek egyikébe sem. De akkor P a négyszög belsejében van.

Könnyű belátni, hogy csak egy pont van a négyszög belsejében, amely az előírásoknak eleget tesz.



3. ábra



4. ábra

Tegyük fel ugyanis, hogy két pont is lenne P és P_1, amelyik a négyszöget a kívánt módon osztja fel négy egyenlő területű részre (4. ábra). Ekkor – mivel a négyszög konvex – P_1 a P által kiosztott négy rész valamelyikében (esetleg a határán) van. Legyen ez pl. $HPGD$. Ekkor $T_{HP_1GD} < T_{HPGD} = \dfrac{1}{4}ABCD$, azaz P_1 nem osztja négy egyenlő területű részre a négyszöget.