I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait, szögeit a szokásos módon, a körülírt körének sugarát r-rel. Tudjuk, hogy az oldalak kifejezhetők a sugár segítségével:

$$a=2r\sin\alpha,\qquad b=2r\cdot\sin\beta,\qquad c=2r\sin\gamma.$$

Innen

$$a^2+b^2+c^2=4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma),\qquad \text{mivel}\quad r=1. \tag{1}$$

Ezt a kifejezést kell vizsgálnunk. Felhasználva a háromszögben fennálló következő összefüggéseket

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,\qquad \sin\gamma=\sin(\alpha+\beta).$$

Továbbá hogy

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\qquad \text{és}\qquad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,$$

alakítsuk (1)-et szorzattá

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=4\Big(1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+\big(\sin(\alpha+\beta)\big)^2\Big)=\\ &=4(2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta)=\\ &=4\big[2-\cos^2\alpha\,\underbrace{(1-\sin^2\beta)}_{\cos^2\beta}-\cos^2\beta\,\underbrace{(1-\sin^2\alpha}_{\cos^2\alpha}+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\big]=\\ &=4\big[2-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\big]=\\ &=8\big[1+\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)\big].\end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy a kerek zárójelben álló kifejezés nem más, mint a $\cos(\alpha+\beta)$ (-1)-szerese, de $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma$ miatt $\big[-\cos(\alpha+\beta)\big]=\cos\gamma$. Azaz

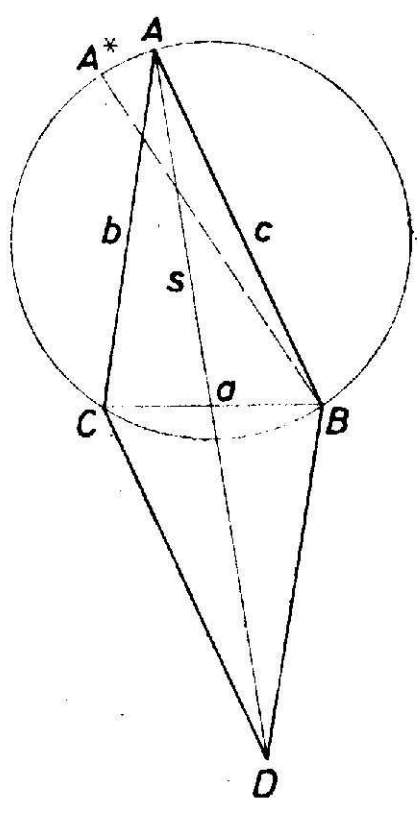
$$a^2+b^2+c^2=8(1+\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma).$$

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor mindhárom szögének cosinusa pozitív, tehát az $a^2+b^2+c^2>8$ teljesül.

Ha a háromszög derékszögű, akkor valamelyik tényező 0, s így valóban $a^2+ +b^2+c^2=8$.

És végül, tompaszögű háromszög esetén csak egy cosinus lehet negatív (a háromszögben csak egy tompaszög lehet), s emiatt a szorzat negatív, azaz a négyzetösszeg kisebb 8-nál.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $a\le b\le c$, és jelöljük az a-val, b-vel, c-vel szemközti csúcsokat A-val, B-vel, C-vel, A-nak BC felezőpontjára vonatkozó tükörképét D-vel.



Az $ABCD$ paralelogrammában

$$2(b^2+c^2)=a^2+4s^2,$$

ahol s az ABC háromszög A-hoz tartozó súlyvonalának a hosszát jelöli. Adjunk mindkét oldalhoz $2a^2$-et, kapjuk, hogy

$$2(a^2+b^2+c^2)=3a^2+4s^2.$$

Ha tehát a háromszög köré írható körön a B, C csúcsok rögzítettek, és A mozog, akkor a bal oldal értéke s monoton függvénye. Így ha hegyesszögű háromszögben A-t a B-vel átellenes A^* helyzetbe toljuk, akkor az $(a^2+b^2+c^2)$ az új helyzetben kisebb lesz, mint a régiben. Ha viszont C-nél tompaszög volt (az $a \leq b \leq c$ feltétel miatt csak ott lehetett), akkor az új helyzetben nagyobb lesz a négyzetösszeg, mint a régiben. Az pedig, hogy ha A azonos A^*-gal, $a^2+b^2+c^2=2BA^{*2}=8$, Pitagorasz tételéből látható.