I. megoldás. Ha $1 \leqq x < y$, akkor $[x,y]$ legalább kétszer akkora, mint x, emiatt $\frac{1}{[x,y]} \leqq \frac{1}{2x}$. Ezt felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala felülről becsülhető :

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2d}.$$

Ha $c \geqq 4$, akkor $d > c$ miatt $d \geqq 5$, másrészt $a \geqq 1$ és így $b \geqq 2$, tehát

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2d} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10},$$

ami valóban kisebb 1-nél.

Ha $c < 4$, akkor $a = 1$, $b = 2$ és $c = 3$, tehát $d \geqq 4$. Ekkor

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2d} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} < 1,$$

tehát ebben az esetben is beláttuk az állítást.

Magyar Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Egy jobb becsléssel elkerülhető az esetszétválasztás. Mivel $[x,y]$ az x-nek is és az y-nak is többszöröse, ezért xy-nak $y[x,y]$ és $x[x,y]$ is többszöröse. Emiatt e két utóbbi szám különbsége is többszöröse xy-nak. Ha tehát ez a különbség nem 0, akkor az abszolút értéke legalább xy. Így ha $0 < x < y$, akkor

$$y[x,y] - x[x,y] \geqq xy,$$

ahonnan $[x,y] \cdot x \cdot y$-nal való osztás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \geqq \frac{1}{[x,y]}. \tag{2}$$

Ezt alkalmazva

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]} \leqq$$
$$\leqq \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{e}$$

adódik, ami valóban kisebb, mint 1.

Megyesi Gábor (Szeged, Juhász Gy. Tanárképző Főisk. I. sz. Gyak. Isk., 8. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladatra nagyon sok hibás dolgozat érkezett. Ezek legtöbbjében egy, a kitűzöttnél élesebb – egyébként igaz – állítás „bizonyítása" szerepelt. Eszerint a bal oldal maximuma $1-\frac{1}{16}$. Gondolatmenetük lényegében a következő volt :

»Mivel $\frac{1}{[x,y]} \leqq \frac{1}{2x}$, így $\frac{1}{[a,b]} \leqq \frac{1}{2}$; az első tag tehát akkor maximális, ha $a = 1$ és $b = 2$. Ekkor $\frac{1}{[b,c]} = \frac{1}{[2,c]} \leqq \frac{1}{4}$ és ez is csak akkor lehetséges, ha $c = 4$. Ha $c = 4$, akkor $\frac{1}{[c,d]} \leqq \frac{1}{8}$ és így $d = 8$, és ugyanígy $e = 16$, a bal oldal maximuma tehát $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = 1-\frac{1}{16}$.«

Ez a gondolatmenet hibás, bár az eredmény igaz. Ha valamit több lépésben kell maximalizálnunk, akkor nem feltétlenül akkor kapjuk a legjobb eredményt, ha minden lépésben az akkor lehetséges legnagyobb növekedést igyekszünk elérni. Esetünkben kimondatlanul feltételeztük, hogy a bal oldal akkor maximális, ha már az első tag is a lehető legnagyobb. Ez a és b értékét meghatározza, ha most megint „a lehető legtöbbet akarjuk", akkor ez c-t is egyértelművé teszi, és így tovább. Lehetséges azonban, hogy ha eleinte túl mohók vagyunk, az a későbbiekben nagyon megköti a kezünket.

Egy nyilvánvaló példa a fentiek illusztrálására az alábbi. Tegyük fel, hogy két nemnegatív szám összege 1, és a szorzatukról szeretnénk elérni, hogy a lehető legnagyobb legyen. Az első tényező nyilván akkor a legnagyobb, ha 1, de így a második tényező már csak 0 lehet, és a szorzat láthatóan nem lesz maximális.

Egy másik példához jutunk, ha az eredeti feladatot kissé módosítjuk. Az idézett rossz megoldásokban azt „igazolták", hogy a feltételek esetén

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]}$$

akkor maximális, ha $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=8$ és $e=16$. Ha ehelyett

$$\frac{1}{\sqrt{[a,b]}}+\frac{1}{\sqrt{[b,c]}}+\frac{1}{\sqrt{[c,d]}}+\frac{1}{\sqrt{[d,e]}} \tag{3}$$

maximumát keressük, akkor az idézett „megoldás" szerint

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{16}}=1,81\,066$$

adódik, ez azonban most nem maximum, mert ha $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=6$, $e=12$, akkor (3) értéke

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{12}}=1,81\,228.$$

Jól látható, hogy az összeg második tagja csökkent, de ennek révén a harmadik és a negyedik tagot növelhettük, úgy, hogy az összeg meghaladja az előző értékét.

2. Említettük, hogy igaz egy élesebb állítás is. Ezt be is látjuk n számra ($n \geqq 2$), n-re vonatkozó teljes indukcióval.

Legyen tehát $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_n, a_i$ egész. Ekkor azt állítjuk, hogy

$$\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+\ldots+\frac{1}{[a_{n-1},a_n]} \leqq 1-\frac{1}{2^n}. \tag{4}$$

Ha $n=2$, akkor ez az $\frac{1}{[a_1,a_2]} \leqq \frac{1}{2a_1} \leqq \frac{1}{2}$ becslés miatt igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n számra, és lássuk be, hogy ekkor $(n+1)$ számra is igaz. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $a_{n+1} < 2^{n+1}$. Ekkor a II. megoldás becslése szerint

$$\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+\ldots+\frac{1}{[a_n,a_{n+1}]} \leqq \frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1}-\frac{1}{2^{n+1}} \leqq 1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. eset: $a_{n+1} \geqq 2^{n+1}$. Nyilván $[a_n,a_{n+1}] \geqq a_{n+1}$, így most $\frac{1}{[a_n,a_{n+1}]} \leqq \frac{1}{2^{n+1}}$. Az indukciós feltevést felhasználva

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+\ldots+\frac{1}{[a_{n-1},a_n]}\right)+\frac{1}{[a_n,a_{n+1}]} \leqq \\ \leqq \left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.\end{gathered}$$

Ezzel az állítást beláttuk. A bizonyításból az is látszik, hogy (4)-ben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a_i=2^{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$.