Vezessük be a λ és μ nemnegatív számokat, amelyekkel $OA' = \lambda \cdot OA$ és $OB' = \mu \cdot OB$. Ezeket a kifejezéseket (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = \left(\frac{1+\lambda}{1+\mu}\right)^2\left(\frac{OA}{OB}\right)^2.$$

Ha OAB és $OA'B'$ valódi háromszögek akkor OA nem nulla, tehát szükségképpen

$$\frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{1+\lambda}{1+\mu}\right)^2.$$

Másrészt μ sem lehet nulla, ezért ez esetben (1)-gyel egyenértékű a következő kifejezés:

$$\lambda(1+\mu)^2 = \mu(1+\lambda)^2.$$

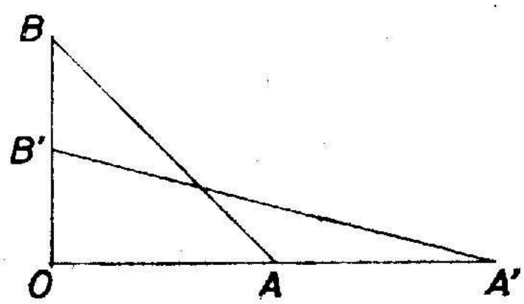
Azonos átalakítások révén ebből azt kapjuk, hogy

$$(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu) = 0.$$

Két eset lehetséges.

I. $\lambda - \mu = 0$, vagyis $\lambda = \mu$. Ekkor az OAB és $OA'B'$ háromszögek valóban hasonlók.

II. $1 - \lambda\mu = 0$, vagyis $\lambda\frac{1}{\mu}$. Ekkor egyáltalán nem biztos, hogy az OAB és $OA'B'$ háromszögek hasonlóak. Ezt egy példával mutatjuk meg. Az O-ból induló a, b félegyenesek legyenek egymásra merőlegesek. Legyen $OA = OB = 1$, továbbá $\lambda = 2$ és $\mu = \mathbf{\frac{1}{2}}$ (1. ábra).



Az OAB háromszög derékszögű egyenlő szárú háromszög, míg az $OA'B'$ háromszög derékszögű, de nem egyenlő szárú.

Mit válaszoljunk ezek után a kérdésre, miszerint igaz-e, hogy az OAB és $OA'B'$ háromszögek hasonlók? Azt kell válaszolnunk, hogy nem tudjuk eldönteni a kérdést. Ehhez (1) nem nyújt elegendő alapot. **(L. L.)**

Megjegyzés. Meglepően nagy nehézséget okozott a feladat megoldása. Sokan nem merték elhinni, hogy az állítás nem igaz. Mások indirekt bizonyítással próbálkoztak, de nem vették észre, hogy nincs ellentmondás. Tipikus hiba volt az is, hogy az $A \Rightarrow B$ alakú állítást $B \Rightarrow A$ alakban bizonyították, még ha fel is merült az, hogy bizonyítani kellene azt, hogy (nem B) $\Rightarrow$ (nem A) (Pedig hamar találtak volna ellenpéldát.)

Akik algebrailag alakították át először a kifejezést, azok közül többen nem tudtak mit kezdeni a szokásos „ ekvivalens átalakítást végeztünk" címkével. Többen osztottak egy olyan kifejezéssel, ami lehet 0, de erre nem gondoltak. Sokakat megzavart egy–egy rossz ábra, például A, A', illetve B, B' sorrendjét nem cserélték fel. Többen foglalkoztak (feleslegesen) azzal az esettel, amikor A, B, ill. A', B' van egy–egy félegyenesen.