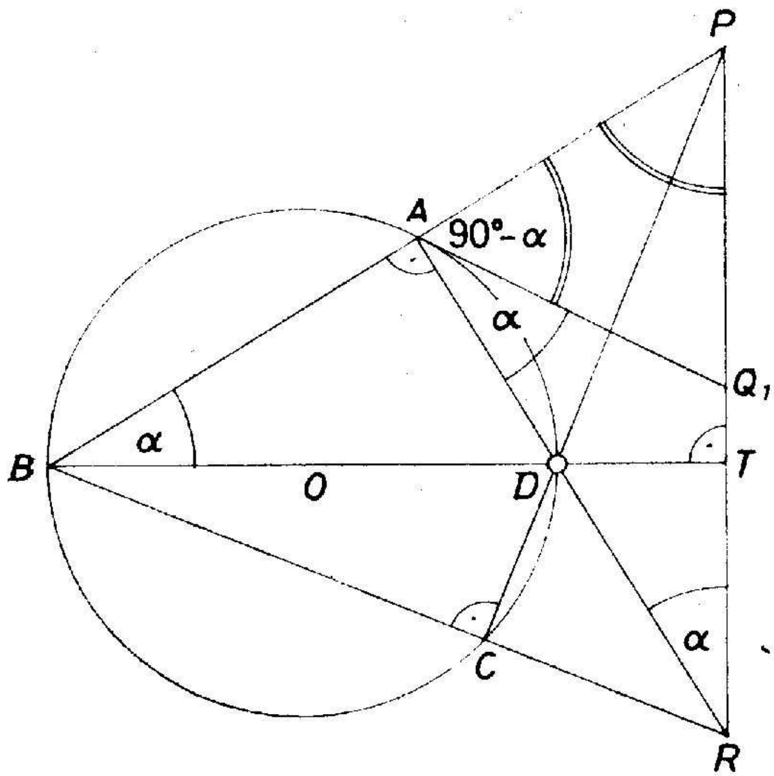
Az $ABCD$ négyszög A-nál és C-nél levő szöge Thalész tétele miatt derékszög. A P, Q, R metszéspontok akkor és csak akkor léteznek, ha az $ABCD$ négyszög nem téglalap. Ezt a továbbiakban fel is tételezzük, más szóval azt, hogy C a körnek nem A-val átellenes pontja. Feltesszük még, hogy a B és D pontok közül D van a kisebbik AC íven. Ezt megtehetjük, mivel B és D szerepe felcserélhető. A BP egyenesnek az A, B pontokon kívül nem lehet a körrel további metszéspontja, így C nem lehet ezen az egyenesen, és emiatt a P pont sem lehet a BR egyenesen.

Minthogy a CD és AD egyenesek a BPR háromszög magasságvonalai, D e háromszög magasságpontja. Így a BPR háromszögnek a BD egyenes is magasságvonala. Jelöljük a BD és PR egyenesek metszéspontját T-vel, a körhöz A-ban húzott érintő és PR metszéspontját Q_1-gyel, az ABD szöget pedig α-val.

Az ARQ_1 és ABD szögek egyenlők, mert mindkettő pótszöge az APQ_1 szögnek. Az AD íven nyugvó Q_1AR érintő szárú kerületi szög ugyancsak egyenlő az ABD szöggel, amely ugyanazon az AD íven nyugvó kerületi szög. Az ARQ_1 háromszög tehát egyenlő szárú: $AQ_1 = RQ_1$.



Az APQ_1 háromszög szintén egyenlő szárú, mivel az AP oldalon fekvő szögei egyenlők ($PAQ_1 \sphericalangle$ és $APQ_1 \sphericalangle$ is pótszöge α-nak), így $AQ_1 = PQ_1$.

Mindebből következik, hogy Q_1 a PR szakasz felezőpontja. Hasonló módon belátható, hogy a PB szakaszt a körhöz C-ben húzott érintő is a felezőpontjában metszi. Tehát e felezőpont egyben a két érintő metszéspontja.

Megjegyzések. **1.** Megoldásunk szerint a BD szakasz O felezőpontja, és a Q pont által meghatározott OQ szakasz az A, C, T pontokból derékszög alatt látszik, tehát az OQ feletti Thalész kör átmegy az A, C, T pontokon. Ez a kör a BPR háromszög ún. *Feuerbach*–köre.

2. Amint azt sokan észrevették, a bizonyítandó állítás egy speciális esete *Pascal tételé*nek, amely szerint egy közönséges kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalpárjai vagy egy egyenes három pontjában metszik egymást, vagy páronként párhuzamosak, vagy a hatszög egyik átellenes oldal párját alkotó oldalai párhuzamosak a másik két átellenes oldalpár metszéspontjai által meghatározott egyenessel. (A tétellel kapcsolatos kérdéskör részletes tárgyalása megtalálható például *Hajós György: Bevezetés a geometriába* c. művében.)

A közönséges kúpszelet szerepét gyakorlatunkban a BD átmérőjű kör játssza, a beírt hatszögét pedig az $ABCD$ négyszög, amelynek A és C csúcsát olyan csúcsoknak tekintjük, ahol két–két csúcspont egybeesik. (Egybeeső csúcsokat összekötő oldalegyeneseknek a kör érintői felélnek meg.)

A Pascal–tételt felhasználó bizonyításokat kellő magyarázattal helyes megoldásnak fogadtuk el. **(R. Zs.)**