I. megoldás. Egy szám akkor végződik $N = 1981$ nullára, ha a törzstényezős alakjában a 2 és az 5 kitevője közül a kisebbik N. Mivel az egész számok között a párosak gyakoribbak, mint az 5-tel oszthatóak, várható, hogy csak olyan megoldás létezik, amelyben az 5 kitevője a kisebb. Jelöljük az $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ szorzat törzstényezős alakjában az 5 kitevőjét $K(n)$-nel. Olyan n-et keresünk tehát először, amelyben

$$K(n) = N. \tag{1}$$

Mivel $n < m$ mellett $m!$ osztható $n!$-sal, $K(n) \le K(m)$. Mivel az első N öttel osztható szám között öt magasabb hatványai is szerepelnek, az N kitevő eléréséhez nincs szükség az első N öttel osztható számra, $n < 5N$.

Jelöljük az n-nél nem nagyobb, 5-tel osztható, de 25-tel nem osztható számok számát $a(n)$-nel. Hasonlóan jelöljük az n-nél nem nagyobb, pontosan 25-tel, 125-tel, 625-tel, 3125-tel osztható számok számát rendre $b(n)$-nel, $c(n)$-nel, $d(n)$-nel és $e(n)$-nel. Mivel $n < 5N < 5 \cdot 3125$, az 5 hatodik hatványával osztható szám már nem fordulhat elő az első n szám között. Általában az 5^k-nal osztható, de 5^{k+1}-nel nem osztható számok $n!$-ban 5 kitevőjét k-val növelik, emiatt

$$\begin{aligned} K(n) &= a(n) + 2b(n) + 3c(n) + 4d(n) + 5e(n) = \\ &= A(n) + B(n) + C(n) + D(n) + E(n), \end{aligned}$$

ahol $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$, $E(n)$ az n-nél nem nagyobb, legalább 5-teI, 25-tel, 125-tel, 625-tel, 3125-tel osztható számok számát jelöli, vagyis

$$\begin{aligned} A(n) &= a(n) + b(n) + c(n) + d(n) + e(n), \\ B(n) &= b(n) + c(n) + d(n) + e(n) \\ C(n) &= c(n) + d(n) + e(n), \\ D(n) &= d(n) + e(n), \\ E(n) &= e(n). \end{aligned}$$

Ha $n = 5N$, akkor $A(n) = N = 1981$, $B(n) = 396$, $C(n) = 79$, $D(n) = 15$, $E(n) = 3$, tehát

$$K(n) = 1981 + 396 + 79 + 15 + 3 = 2474 = N + 493.$$

Ha ezzel a 493-mal csökkentjük N-et, az várhatóan sok lesz, hiszen közben nemcsak $A(n)$, hanem $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$, $E(n)$ is csökken. Valóban,

$$K(5 \cdot 1488) = 1488 + 297 + 59 + 11 + 2 = 1857 = N - 124.$$

Adjuk most ezt a 124-et az 1488-hoz:

$$K(5 \cdot 1612) = 1612 + 322 + 64 + 12 + 2 = 2012 = N + 31,$$

csökkentjük 31-gyel az 1612-t:

$$K(5 \cdot 1581) = 1581 + 316 + 63 + 12 + 2 = 1974 = N - 7.$$

Hasonlóan tovább haladva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K(5 \cdot 1588) &= 1588 + 317 + 63 + 12 + 2 = 1982 = N + 1, \\ K(5 \cdot 1587) &= 1587 + 317 + 63 + 12 - 2 = 1981 = N. \end{aligned}$$

Tehát $n = 7935$ mellett $K(n) = N$ és nyilván ugyancsak N az értéke $K(n)$-nek, ha $n = 7936, 7937, 7938$, vagy $n = 7939$. Ezek mellett $n!$ törzstényezős alakjában a 2 kitevője nagyobb, mint az n-nél nem nagyobb páros számok száma, tehát várakozásunknak megfelelően nagyobb N-nél. Azt is láttuk, hogy $n < 7935$ mellett $K(n) < N$ és $n \ge 7940$ mellett $K(n) > N$, tehát csak a felsorolt öt szám lehet a tényezők száma, ha a szorzat 1981 darab 0-ra végződik.

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldásban bevezetett jelöléseket, és azt az eredményt, hogy elegendő az (1) egyenletet megoldani. Írjuk fel a keresett n számot az 5 alapú számrendszerben! Mivel $n < 5N < 5^6$, a kapott szám legfeljebb hat jegyű. Jelöljük a számjegyeket rendre P-vel, Q-val, R-rel,S-sel, T-vel és U-val. Az 5 alapú számrendszer $n = PQRSTU$ számánál nem nagyobb, öttel osztható számok száma az $n/5$ hányados egész része. Ennek az 5 alapú számrendszerben felírt alakját úgy kapjuk, hogy elhagyjuk az utolsó számjegyet. Tehát az 5 alapú számrendszerben $A(n) = PQRST$, és hasonlóan tovább haladva kapjuk, hogy $B(n) = PQRS$, $C(n) = PQR$, $D(n) = PQ$, $E(n) = P$. Így a $K(n)$ kitevő értéke

$$\begin{aligned} K(n) &= P(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1) + Q(5^3 + 5^2 + 5 + 1) + R(5^2 + 5 + 1) + S(5 + 1) + T = \\ &= 781P + 156Q + 31R + 6S + T. \end{aligned}$$

Itt a P, Q, R, S, T ismeretlenek értéke csak 0 és 4 közötti egész szám lehet. Emiatt ha $K(n) = 1981$, P értéke csak 2 lehet, hiszen $P > 2$ mellett $K(n) \geq 3 \cdot 781 = 2343$, és $P < 2$ mellett $K(n) \leq 781 + 4(156 + 31 + 6 + 1) = 1557$. Ha $P = 2$, akkor (1) ekvivalens a

$$156Q + 31R + 6S + T = 419$$

egyenlettel. Itt Q értéke csak 2 lehet, hiszen $Q > 2$ mellett a bal oldal értéke legalább 468, $Q < 2$ mellett legfeljebb 308. Ha $P = Q = 2$, (1) ekvivalens a

$$31R + 6S + T = 107$$

egyenlettel. Itt R értéke csak 3 lehet, és ekkor $S = 2$, $T = 2$. Tehát a keresett n szám alakja az 5 alapú számrendszerben 223220, 223221, 223222, 223223, vagy 223224, így n megfelelő értékei a 10 alapú számrendszerben 7935, 7936, 7937, 7938 és 7939.