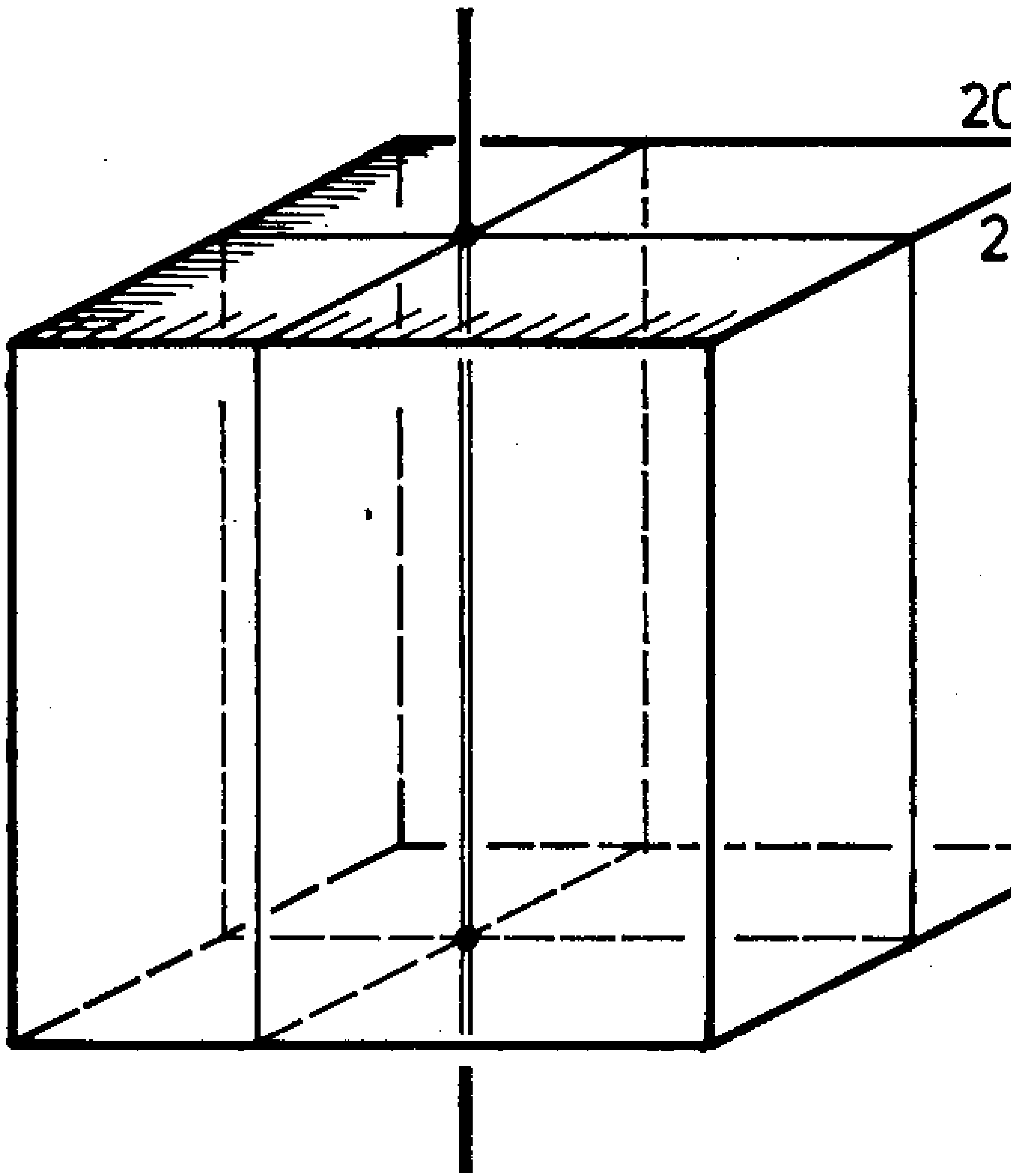
Helyezzük el a kis hasábokból összerakott kockát egy térbeli koordináta-rendszer első nyolcadába úgy, hogy csúcsa az origóba essék és élei a tengelyeken legyenek. Ekkor biztosan van egy olyan kis hasáb, amelynek csúcsa ugyancsak az origóba esik, élei rajta vannak a koordináta tengelyeken és persze minden csúcsának a koordinátái egész számok. Vegyük el ezt a kis hasábot és tekintsük a megmaradó testben azt a csúcsot (ha több van, az egyiket), amelyhez tartozó koordináták összege a legkisebb. Mivel a hasábok hézagmentesen töltik ki a kockát, lesz egy olyan kis hasáb, amelynek valamelyik csúcsa megegyezik a kiválasztott csúccsal és élei a koordináta-rendszer tengelyei által alkotott triéderrel egybevágó triédert határoznak meg, azaz a kis hasáb élei ugyancsak párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel és csúcsainak koordinátái egész számok. Az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy a maradék test minden csúcsának minden koordinátája egész szám, és minden éle párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel. Az eljárás során végül is minden kis hasábhoz eljutunk egyszer, és az eljárás véges sok lépésben befejeződik. Ezzel beláttuk, hogy mindegyik kis hasáb éle párhuzamos a kocka valamelyik élével és minden csúcsának koordinátái egész számok.

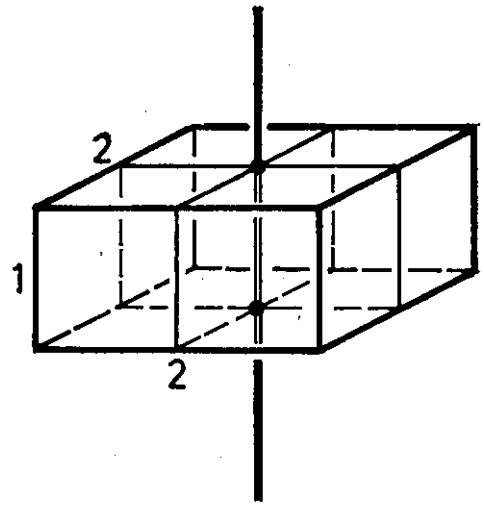
Most azt fogjuk megmutatni, hogy azok között az egyenesek között, amelyek a kocka valamelyik lapjára merőlegesek és egész koordinátájú pontokon mennek át, van olyan, mely egyetlen kis hasábnak a belsején sem megy át. Válasszuk ki a kocka egy lapját. Erre a lapra merőleges, egész koordinátájú ponton átmenő olyan egyenes, mely átfúrja a kockát, $19 \cdot 19$ van. Mivel 3 nem párhuzamos lappárja van a kockának, az összes egyenesek száma $3 \cdot 19 \cdot 19 = 1083$. Válasszunk ki közülük egyet és fektessünk rajta keresztül a vele párhuzamos kockalapokkal párhuzamos síkokat (1. ábra).



1. ábra

Ez a két sík a kockát 4 hasábra osztja. Mind a négy rész térfogata páros, hiszen a kiválasztott egyenessel párhuzamos élek hossza mindig 20. Ha ez az egyenes nem döfne át egyetlen kis hasábot sem, akkor készen volnánk.

Ha ez az egyenes átdöf egy kis hasábot, akkor csak a 2×2-es lap középpontján mehet át, és így ebből a kis hasábból mind a 4 hasábba, páratlan sok (1-1) kis egység-kocka jut (2. ábra).



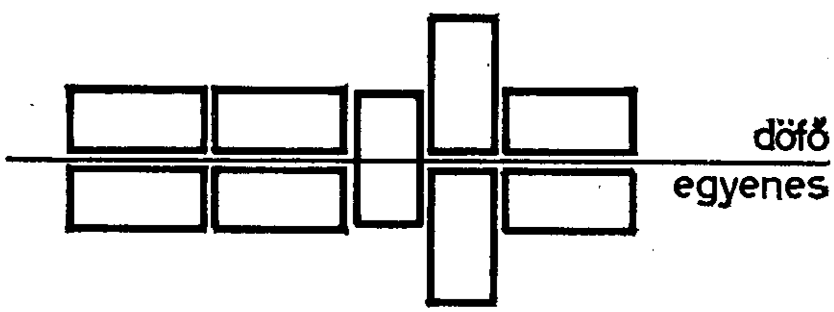
2. ábra

De akkor a térfogatok csak úgy lehetnek párosak, ha az egyenes páros számú kis hasábot döf át. Vagyis minden egyenes legalább két kis hasábon menne át, azaz a kockában legalább $1083 \cdot 2 = 2166$ kis hasábnak kellene lennie, pedig csak 2000 van. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát van a kocka belsejében olyan, valamelyik éllel párhuzamos egyenes, mely egyetlen kis hasáb belsején sem halad át.

Megjegyzések. 1. Annak pontos belátása, hogy a kocka párhuzamos helyzetű hasábokból építhető csak fel, egyetlen dolgozatban sem szerepelt. Említve is csak néhány dolgozatban volt, hogy ez nem triviális.

2. Megoldásunk azon alapul, hogy $2 \cdot 3 \cdot 19^2 > 20^3/4$. Ha $2n$ oldalú kockát tekintünk (páratlan nem is rakható ki), akkor a bizonyítás gondolatmenete ugyanígy alkalmazható ha $2{\cdot}3{\cdot}(2n{-}1)^2 > (2n)^3/4$, vagyis ha $(n{-}11)(n^2{-}n{+}1){+}8 < 0$. Ez pedig igaz $n = 1, \ldots, 10$ esetén, de ha $n{>}10$, akkor nem teljesül. Tehát tudjuk, hogy a $2, \ldots, 20$ oldalú kocka átdöfhető. Viszont $22, 24, \ldots$ stb.-re bizonyításunk nem működik. Így nyitott kérdés egyfelől az, hogy $22, 24, \ldots$ stb.-re a kocka átdöfhető-e, másfelől az átdöfhető kockák esetére az, hogy legalább hány helyen döfhető át.

3. A dolgozatokban a legáltalánosabb tévedés az volt, hogy azt, hogy egy átszúró egyenes páros sok hasábot döf át, azzal indokolták, hogy az egyenesnek páros hosszú szakasza halad a kockán belül. Ennek a 3. ábrán bemutatott elrendezés is eleget tenne, noha csak egy hasábot döf át.



3. ábra