Hány egész megoldása van az alábbi egyenletnek?

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{1981}. \tag{1}$$

A törteket eltávolítva és rendezve kapjuk, hogy

$$3xy-1981x-1981y=0.$$

Itt a bal oldal szorzattá alakítható, ha megszorozzuk 3-mal, és hozzáadunk 1981^2-t:

$$(3x-1981)(3y-1981)=1981^2. \tag{2}$$

Ennek az egyenletnek ugyan $x=y=0$ is gyöke, ami nyilván nem gyöke (1)-nek, de (2) minden további gyöke gyöke (1)-nek, és (1) gyökei mind gyökei (2)-nek, hiszen az xy-nal való szorzás csak az $x=0$ vagy $y=0$ újabb gyököket hozhatja be, és ha x, y közül az egyik 0, akkor (2) szerint a másik is az.

Elegendő tehát a (2) egyenlet 0-tól különböző egész megoldásait összeszámolni. Ha x és y 0-tól különböző egészek, akkora (2) szerint az $A=3x-1981$ szám az $N=1981^2=7^2\cdot 283^2$ szám (-1981)-től különböző osztója. Megfordítva, N valamely A osztójából kiindulva akkor kapjuk (2) valamely egész megoldását, ha $A+1981$ is, és $\frac{1981^2}{A}+1981$ is osztható 3-mal. Mivel 1981 3-mal osztva 1 maradékot ad, ehhez szükséges és elegendő, hogy $A+1$ osztható legyen 3-mal. Tehát A megfelelő értékei a következők:

-1, -7, -283, -7^2, -283^2, $-7^2\cdot 283$, $-7\cdot 283^2$, $-7^2\cdot 283^2$, és (1) egész megoldásainak száma 8.