Öt elemből tízféle pár készíthető. Ha a keresett öt szám között például A és B egyenlő volna, akkor ezeket a C, D, E számokkal párba állítva rendre egyenlő összegeket kapnánk. Emiatt csak akkor várhatjuk, hogy kilenc különböző összeg állítható elő a számokból, ha azok között nincsenek egyenlőek. Tegyük fel, hogy a keresett számok nagysága az ABC szerinti sorrendjükben nő:

$$A < B < C < D < E. \tag{1}$$

Olyan számokat keresünk, amelyek tíz páronkénti összege közül vagy az összes 1 és 9 közötti egész, vagy pontosan egy összeg értéke nem 1 és 9 közötti egész. Az első esetben csak egy olyan 1 és 9 közötti egész lehet, amelyik kétszer fordul elő az összegek között. Jelöljük ezt a számot X-szel. A második esetben legyen X a nem 1 és 9 közötti egész összeg. Ha a keresett számokat az

$$A' = 5 - E, \quad B' = 5 - D, \quad C' = 5 - C, \quad D' = 5 - B, \quad E' = 5 - A \tag{2}$$

számokkal helyettesítjük, ezek páronkénti összegei az eredeti összegeket 10-re kiegészítő számok lesznek. Megfelelő számokból tehát megfelelő számokat kapunk, és a hozzájuk tartozó tizedik összeg $X' = 10 - X$. Emiatt feltehetjük, hogy $X \geqq 5$, ebben az esetben az öt legkisebb összeg értéke 1, 2, 3, 4 és 5.

Nézzük meg, mivel lehetnek egyenlők az $A+B$, $A+C$, $B+C$ összegek. Az első kettő értéke csak 1 és 2 lehet, hiszen a tíz lehetséges páronkénti összeg között ezek a legkisebbek. Az már nem biztos, hogy $B+C$ egyenlő 3-mal, mert $A+D$ értéke, vagy akár $A+E$ értéke is kisebb lehet $B+C$-nél. Más eset azonban nem lehet, tehát $B+C$ értéke 3, 4 vagy 5 lehet.

Ha $B+C=3$, akkor $A=0$, $B=1$, $C=2$ és 4-gyel csak $A+D$ lehet egyenlő, hiszen ennél minden más páronkénti összeg nagyobb. Tehát $D=4$, és ekkor $B+D=5$, $C+D=6$, továbbá az $(A+E)$, $(B+E)$, $(C+E)$, $(D+E)$ összegek között csak akkor fordulhatnak elő a 7, 8, 9 számok, ha $E=7$. Ekkor $X=D+E=11$.

Ha $B+C=4$, akkor $A=-0{,}5$ $B=1{,}5$ $C=2{,}5$ és 3-mal $(A+D)$-nek kell egyenlőnek lennie. Tehát $D=3{,}5$ és ekkor $B+D=5$, $C+D=6$, és így $E=5{,}5$ $X=A+E=B+D=5$.

Ha $B+C=5$, akkor $A=-1$, $B=2$, $C=3$, és 3-mal ismét $(A+D)$-nek kell egyenlőnek lennie. Tehát $D=4$, és $B+D=6$, $C+D=7$. Most az $(A+E)$, $(B+E)$, $(C+E)$, $(D+E)$ összegek között a 4, 8, 9 számoknak kell előfordulniuk, így $E=5$, $X=C+D=B+E=7$. Összefoglalva eddigi eredményeinket, a (2)-ből kapott megoldásokat is figyelembe véve, az (1) feltétel mellett a következő öt megoldást kapjuk:

A	B	C	D	E	X
0	1	2	4	7	11
-0,5	1,5	2,5	3,5	5,5	5
-1	2	3	4	5	7
0	1	2	3	6	3
-2	1	3	4	5	-1

Tehát a feladat első kérdésére „igen” a válasz. Mivel az összes esetet sorra vettük, és X értéke egyikben sem volt 0, a második kérdésre „nem” a helyes válasz.

Megjegyzés. Megállhattunk volna a megoldásunkban a $B+C=3$ eset vizsgálata után, hiszen elegendő egyetlen megfelelő szám-ötöst találni ahhoz, hogy az első kérdésre válaszoljunk. Nincs szükség az összes lehetséges eset sorravételére a második kérdés megválaszolásához sem, hiszen $X=0$ mellett a tíz páronkénti összeg összege 45 volna, amiből

$$(A+B)+(B+C)+(C+D)+(D+E)+(E+A) = 2(A+B+C+D+E) = 22{,}5$$

következne, ami nem egyeztethető össze azzal, hogy bármely két szám összege egész.