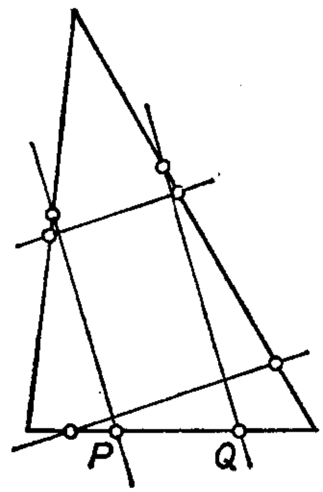
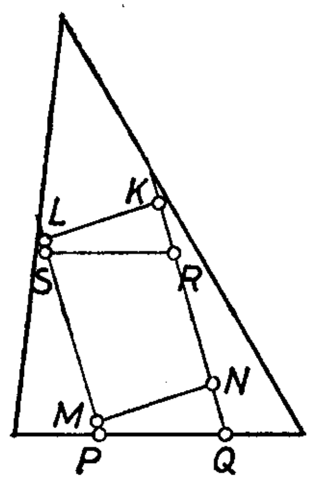
Először azt látjuk be, hogy egy háromszög belsejében fekvő tetszőleges paralelogrammához mindig található olyan másik paralelogramma, amelynek területe nem kisebb az eredetiénél, és amelynek mind a négy csúcsa a háromszög kerületére esik. Ez utóbbiról még azt is megkövetelhetjük, hogy egyik csúcsa essen egybe a háromszög valamelyik csúcsával.

Feltehetjük, hogy olyan paralelogrammából indulunk ki, amelynek nincs mind a négy csúcsa a háromszög kerületén. Hosszabbítsuk meg a paralelogramma oldalait mindkét irányban. Így 8 félegyenest kapunk. Mind a 8 félegyenesnek van közös pontja a háromszögvonallal. Biztosan van tehát a háromszögnek olyan oldala, amelyen legalább 3 különböző félegyenessel alkotott közös pont található. (Két egybeeső közös pontot kettőnek számítunk.) Ezek közül kettő a paralelogramma párhuzamos oldalegyenesein van (1. ábra).



1. ábra

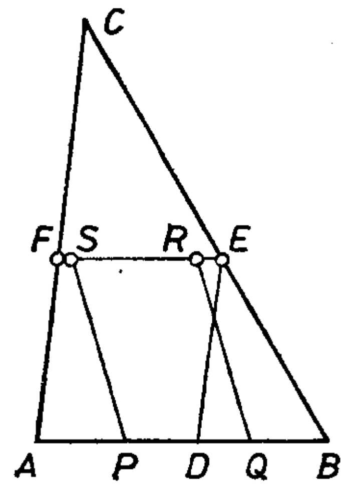
Két ilyen pont által határolt szakaszhoz mint oldalhoz olyan paralelogramma illeszthető, amelyet a háromszög tartalmaz, és amely az eredeti paralelogrammával egyenlő területű. Ezt a 2. ábrán látható területdarabolás bizonyítja.



2. ábra

A $KLMN$ paralelogrammát az $MNQP$ négyszöggel kiegészítjük, majd az így kapott $KLPQ$ négyszögből elvesszük az $MNQP$-vel egybevágó $LKRS$ négyszöget. $PQRS$ a kívánt paralelogramma.

Ehhez nem nehéz olyan paralelogrammát találni, amely nála nem kisebb területű, és amelynek mind a négy csúcsa a háromszög kerületén van úgy, hogy közülük egy a háromszögnek is csúcsa (3. ábra).

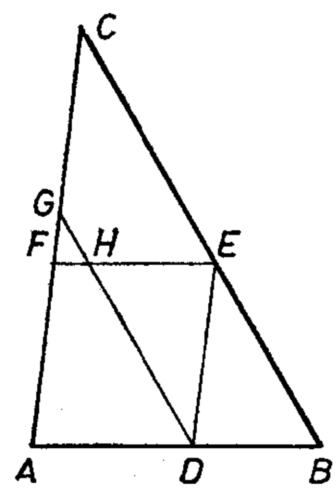


3. ábra

Az $ADEF$ paralelogramma AD alapja ugyanis nem kisebb PQ-nál, és ugyanakkora magasság tartozik hozzá, mint $PQRS$-ben PQ-hoz.

Az $ADEF$-ről és a hasonló elhelyezkedésű paralelogrammákról fogjuk bebizonyítani, hogy területük legfeljebb fele a háromszög területének.

A D, E, F pontok illeszkedjenek rendre az AB, BC, AC oldalra. Ha E a BC oldal felezőpontja, akkor az $ADEF$ paralelogramma területe fele az ABC háromszög területének. Ha E nem felezi BC-t, akkor feltehetjük, hogy E a B csúcshoz közelebb van, mint C-hez, mivel az AB és AC oldalak szerepe felcserélhető. Legyen G az AC oldalnak az a pontja, amelyre $GC = AF$ (4. ábra).



4. ábra

Mivel $AF < AC/2 < AG$, ezért EF és DG metszik egymást. A metszéspontot jelöljük H-val. Az $ADEF$ és $GDEC$ egyenlő területű paralelogrammák által kétszeresen lefedett HDE háromszög területe egyenlő a BED háromszög területével, hiszen a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy az ABC háromszög területe éppen az FGH háromszög területével nagyobb, mint az $ADEF$ paralelogramma területének kétszerese.

Baráti Ákos, (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján