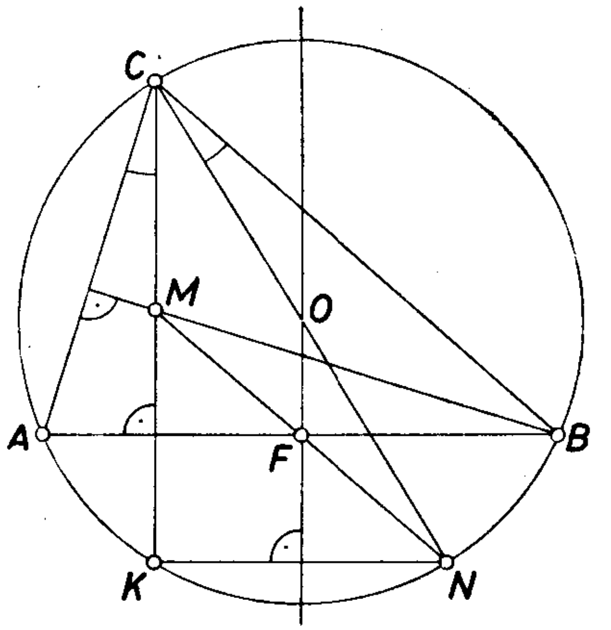
Előre kell bocsátanunk, hogy a feladat állítása csak abban az esetben igaz, ha a háromszög C-nél levő szöge hegyesszög.

Jelöljük O-val az ABC háromszög köré írható kör középpontját, és F-fel az AB oldal felezőpontját. Ha M-et az AB-re tükrözzük, majd az így kapott K pontot tükrözzük az AB oldal felező merőlegesére, akkor végeredményben az N ponthoz jutunk, mivel két egymásra merőleges egyenesre vonatkozó egymás utáni tengelyes tükrözés egyenértékű a tengelyek metszéspontjára vonatkozó tükrözéssel. Tudjuk, hogy K a háromszög köré írt körre esik, így N ugyancsak rajta van e körön, hiszen a háromszög köré írt kör szimmetrikus az AB oldal felező merőlegesére. A tükrözés folytán $\widehat{AK}=\widehat{BN}$.

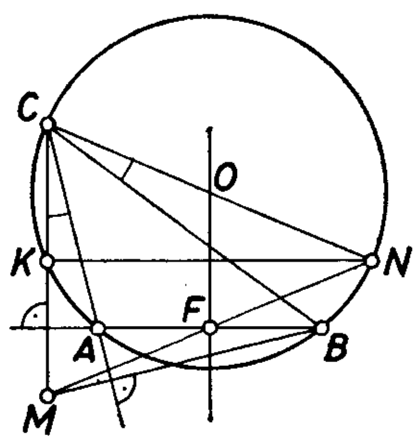


1. ábra

Ha az ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra), akkor C-t nem tartalmazza az $\widehat{AK}$, $\widehat{BN}$ ívek egyike sem, mivel az AB egyenes elválasztja C-t a K, N pontoktól. A kerületi szögek tétele értelmében ezért $ACK\sphericalangle=BCN\sphericalangle$. Mivel C, M, K egy egyenesbe esnek, és C nem választja el M-et K-tól, az $ACK\sphericalangle$ azonos az $ACM\sphericalangle$-gel. Ebben az esetben tehát igaz az állítás.

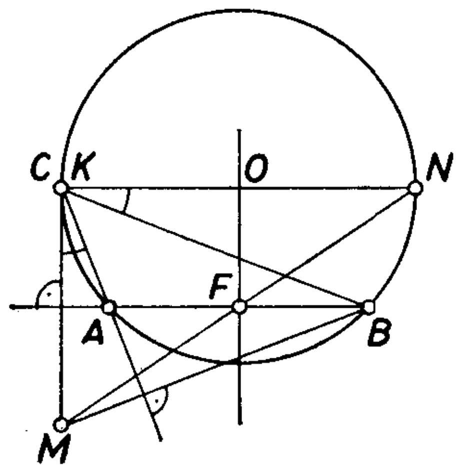
Ha a C-nél levő szög továbbra is hegyesszög, de a háromszögnek mondjuk az A-nál levő szöge tompaszög, akkor aszerint, hogy O kisebb, egyenlő vagy nagyobb távolságra van az AB egyenestől, mint C, az $\widehat{AK}$ kisebb, egyenlő vagy nagyobb $\widehat{AC}$-nél (2a, 2b, 2c ábra).

Ha $\widehat{AK}$ kisebb $\widehat{AC}$-nél, akkor mivel $\widehat{AK}$ nem tartalmazza C-t, $ACK\sphericalangle=BCN\sphericalangle$, és mivel C nem választja el M-et K-tól, ezért $ACM\sphericalangle=ACK\sphericalangle$ (2a ábra).



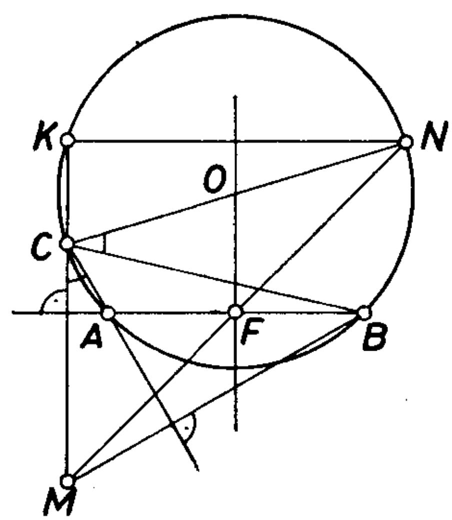
2a ábra

A 2b ábrán látható esetben K egybeesik C-vel. Az AB-vel párhuzamos OC merőleges CM-re, tehát $ACM\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szög, ezért ugyanakkora, mint a vele egyenlő íven nyugvó BCN kerületi szög.



2b ábra

A 2c ábra azt az esetet mutatja, amikor $\widehat{AK}$ nagyobb $\widehat{AC}$-nél. $\widehat{AK}$ tartalmazza C-t, $ACK\sphericalangle$ ezért a $BCN\sphericalangle$ kiegészítő szöge, de kiegészítő szöge az $ACM\sphericalangle$-nek is, hiszen C elválasztja M-et K-tól. Ezek szerint $ACM\sphericalangle = BCN\sphericalangle$.

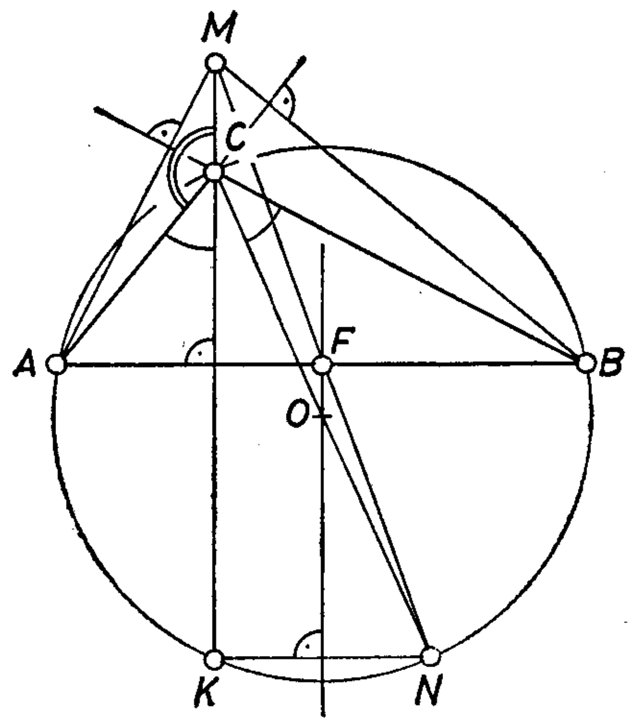


2c ábra

Tehát mindhárom esetben igaz a bizonyítandó állítás. Hasonló megállapításokat tehetünk akkor is, ha az ABC háromszögnek B-nél van tompaszöge.

Ha az ABC háromszög A-nál vagy B-nél levő szöge derékszög, akkor M a derékszög csúcsával, N pedig az AB másik végpontjával esik egybe. Mindkét esetben közvetlenül ellenőrizhető, hogy az állítás teljesül.

Ha C-nél tompaszög van, akkor ugyan fennáll, hogy $ACK\sphericalangle = BCN\sphericalangle$, de C elválasztja K-t és M-et, így az $ACM\sphericalangle$ kiegészítő szöge az $ACK\sphericalangle$-nek, ami nem lehet 90°-os, ezért $ACM\sphericalangle \neq BCN\sphericalangle$ (3. ábra).



3. ábra

Végül nézzük azt az esetet, amikor C-nél derékszög van. Ekkor C és M egybeesnek, ezért az $ACM\sphericalangle$-ről nincs is értelme beszélni, míg a $BCN\sphericalangle$ jól meghatározott szög. Következésképp ebben az esetben sem igaz az állítás.

Megjegyzés. A megoldók nagy része igaznak találta az állítást, mivel csak hegyesszögű háromszöggel foglalkozott, és erre az esetre sikerült is azt bebizonyítania. Ezek dolgozatára kevesebb pontot adtunk, mint azokéra, akik a tompaszögű esetet is megvizsgálták.