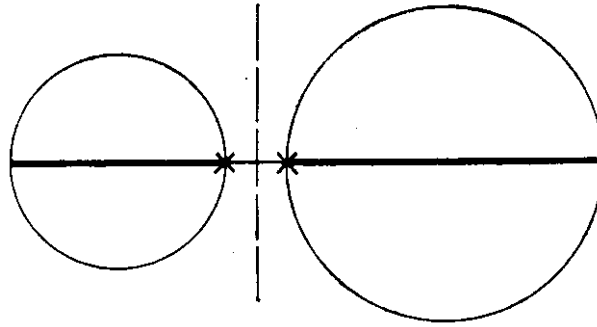


Ha két körlemeznek nincs közös pontja, a középpontjaikat összekötő egyenesen levő átmérőiknek sincs közös pontjuk. Vegyük a két átmérő közti szakasz felezőpontját, és húzzunk ezen át az átmérők egyenesére merőleges egyenest. Ez elválasztja a két kört, vagyis az általa létrehozott két félsík közül mindegyik belsejében pontosan egy körlemez van a kettő közül.



Tegyük fel, hogy nem igaz a feladat utolsó állítása, vagyis az azonos színű köröknek sincs közös pontjuk. Rajzoljuk meg mindhárom párhoz a fenti módon megkonstruált elválasztó egyenesüket. Ha ez a három egyenes egy háromszöget fog közre, nevezzük a háromszöget tartalmazó oldalukat belső oldalnak, a másik oldalukat pedig mondjuk külsőnek. Vegyük mindhárom színből a hozzá tartozó egyenes külső oldalán levő kört. Ezeknek nem lehet közös pontjuk, hiszen az őket tartalmazó félsíkoknak sincs közös pontjuk, vagyis nincs olyan pont a síkon, amelyik mindhárom egyenesnek a külső oldalán volna.

Ha a három egyenes egy ponton megy át, csak hat részre vágják a síkot. Akkor is legfeljebb hat részre vágják szét a síkot, ha van köztük párhuzamos, tehát mindig található a három, félsíkpár között három, amelyeknek nincs közös pontjuk. Ha ugyanis a párok tagjai közül minden lehető módon kiválasztunk egyet, összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ -féle hármast állíthatunk össze a félsíkokból, és az egyenesek a síkot pontosan annyi részre vágják, ahánynak ezek közül közös pontja van.

Ezzel megmutattuk, hogy ha a feladat utolsó állítása nem igaz, akkor a feltétel sem teljesülhet. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a feltétel valóban maga után vonja a következményének mondott állítást.

Megjegyzések. 1. A mondott bizonyítás érvényes akkor is, ha nem vesszük hozzá a körlemezekhez a határvonalukat. Ekkor a megoldás elején szereplő „átmérők közti szakasz” egy ponttá zsugorodhat, és csak egyetlen egyenes választja el a köröket. Emiatt vizsgáltuk meg a sík három egyenesének összes lehetséges kölcsönös helyzetét, és nem éltünk azzal a kínálózó lehetőséggel, hogy az egyeneseket kicsit elmozgatva jussunk mindig arra az esetre, amikor azok háromszöget fognak közre.

2. A feladat kitérésékor lábjegyzetben utaltunk Bárány Imre Helly tételéről írott cikkére (KÖMAL 1981. február, 61-66. oldal). A kapcsolat csupán annyi volt, hogy a szerző a cikkben is megfogalmazta a kitézésre szánt problémát, mégis volt, aki megelégedett annyival, hogy hivatkozott a cikkre. „Megoldását” természetesen nem fogadtuk el.