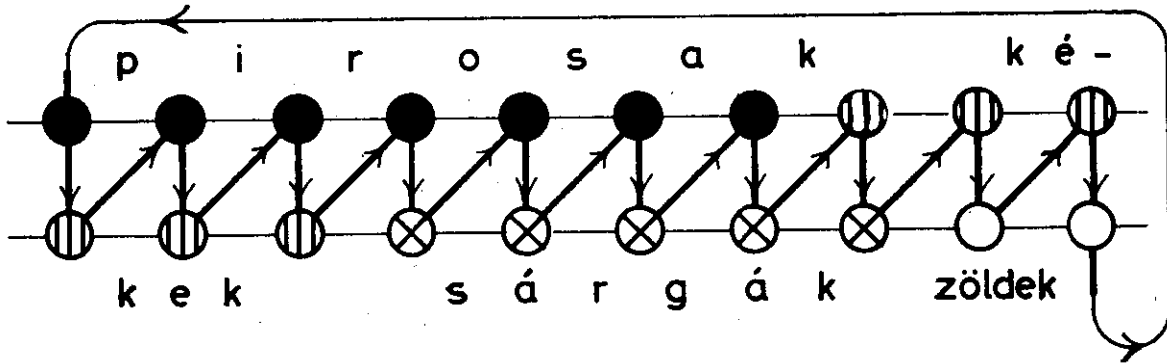


I. megoldás. Tegyük fel, hogy egy színből sincs több gyöngy, mint pirosból. Fűzzük fel fűzerbe a gyöngyöket a pirosakon kezdve, majd a kékeken és sárgákon át folytatva a zöldekig. Vágjuk szét középen két egyforma darabra a kapott fűzért, és húzzuk előre a második felét (anélkül hogy megfordítanánk) az első darab alá.

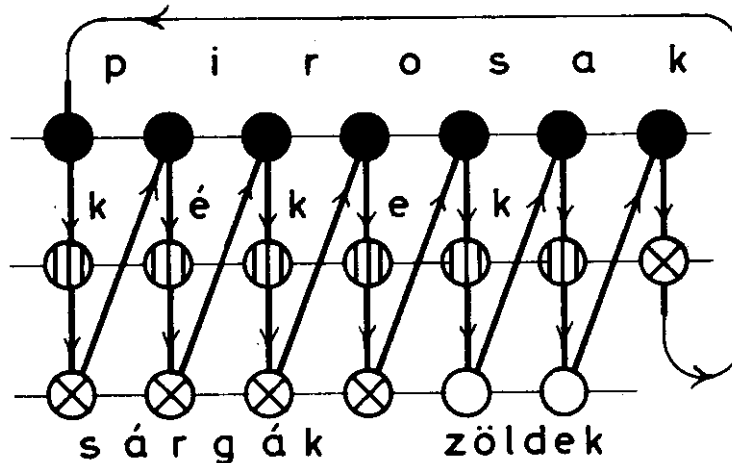


Fésüljük össze a felsőn kezdve a két fűzért, vagyis felváltva tegyük át róluk egy-egy gyöngyöt a készítendő nyakláncra. Megmutatjuk, hogy ezen nem kerülhet két szín egymás mellé. A nyaklánc készítését piros gyönggyel kezdjük, és biztos, hogy nem pirossal fejezzük be, hiszen piros gyöngyünk sem lehet több, mint a többi együttvéve. Emiatt az alsó fűzérre már egyáltalán nem kerülhet piros gyöngy. Ha más szín nem fordul elő egyidejűleg lent és fent az összefésülés előtt, akkor készen is vagyunk a bizonyítással, hiszen a láncra a két fűzér gyöngyei felváltva kerülnek. Csak az a szín találkozhatna önmagával, amelyiket kettévágunk a nagy fűzéren. Ez viszont azt jelentené, hogy az egymás alá kerülő pároknak legalább az egyik tagja (kezdetben lent, aztán fent) kettévágott színű volna. Ámde ekkor a kettévágott színből legalább ötven gyöngyünk volna. Mivel ebből sincs több, mint pirosból, így piros is legalább ötven volna. De ekkor a felső fűzér csupa piros gyöngyből állna, tehát mégsem volna kettévágott szín. Ellentmondásra jutottunk, ami azt bizonyítja, hogy jó nyakláncot csináltunk.

II. megoldás. Jelöljük a piros, kék, sárga és zöld gyöngyök számát rendre p -vel, k -val, s -sel és z -vel, és tegyük fel, hogy

$$(1) \quad p \geq k \geq s \geq z.$$

Készítsük el az első, nagy fűzért ugyanúgy, mint az I. megoldásban, de ezt most csupa p hosszúságú darabra vágjuk szét, kivéve az utolsó darabot, ami természetesen lehet p -nél rövidebb. Tegyük egymás alá a kapott darabokat, és fésüljük össze őket felülről lefelé haladva.



Biztosan jó nyakláncot kapunk, hiszen most csak azokat a színeket vághatjuk ketté, amelyekből p -nél kevesebb van, tehát nem kerülhetnek azonos színű gyöngyök egymás alá. Mivel $p \leq 50$, legalább még egy p hosszúságú darabunk lesz, így minden piros gyöngy mögé jut más színű gyöngy, a kapott lánc valóban megfelelő.

Megjegyzés. Mindkét megoldás könnyen módosítható úgy, hogy csak annyit használjunk fel, hogy egy színből sincs több, mint a többiből együttvéve. Különböző színek és a gyöngyök száma tetszőleges lehet.