

Jelöljük az  $a$ ,  $b$  számok legnagyobb közös osztóját  $d$ -vel, és legyen

$$A = \frac{a}{b}, \quad B = \frac{b}{a}, \quad S = A^2 + B^2, \quad T = A^2 - B^2.$$

Jelöljük még  $S$  és  $T$  legnagyobb közös osztóját  $D$ -vel. Az  $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$  tört nyilván egyszerűsíthető  $d^2$ -tel, így kapjuk az  $S/T$  alakot. Ha  $D > 1$ , ez tovább egyszerűsíthető  $D$ -vel, de mással nem, hiszen  $D$  definíció szerint  $S$  és  $T$  legnagyobb közös osztója. Így a feladat állítása azzal ekvivalens, hogy a  $D$ -vel való egyszerűsítés után a nevező nem  $+1$  vagy  $-1$  lesz, azaz hogy

$$(1) \quad D < |T|.$$

Az  $a$  és  $b$  egészek nyilván csak különbözőek lehetnek, így  $A$  és  $B$  is különböző egészek. Ha  $A > B$ , akkor

$$T = A^2 - B^2 = (2B + (A - B))(A - B) \geq 3 \cdot 1,$$

hiszen  $A - B$  értéke is, és  $B$  értéke is legalább 1. Ha pedig  $B > A$ , akkor

$$|T| = B^2 - A^2 = (2A + (B - A))(B - A) \geq 3 \cdot 1,$$

így (1) igazolásához elegendő belátni, hogy

$$(2) \quad D \leq 2.$$

Mivel  $S = T + 2B^2$ , ha volna  $S$ -nek és  $T$ -nek 2-nél nagyobb közös  $p$  prímosztója, azzal  $B^2$  és így  $B$  is osztható volna. Ámde ekkor  $A^2 = T + B^2$  miatt  $A^2$  és  $A$  is osztható volna  $p$ -vel, ami nem lehet, mert  $A$  és  $B$  legnagyobb közös osztója 1. Emiatt  $D$  csak  $2^k$  alakú lehet, és azt kell megmutatnunk, hogy  $k \leq 1$ .

Mivel  $A$  és  $B$  legnagyobb közös osztója 1, nem lehet mindkettő páros. Ha egyik páros, a másik páratlan,  $S$  és  $T$  páratlanok, tehát  $D = 1$ . Ha  $A$  és  $B$  páratlanok, akkor 4-gyel osztva 1 maradékot adnak, hiszen

$$(2n + 1)^2 = 4(n^2 + n) + 1.$$

Tehát ebben az esetben  $S$  4-gyel osztva 2 maradékot ad, és  $T$  osztható 4-gyel. Emiatt  $D = 2$ , hiszen  $S/2$  már páratlan. Ezzel a feladat állítását beláttuk.