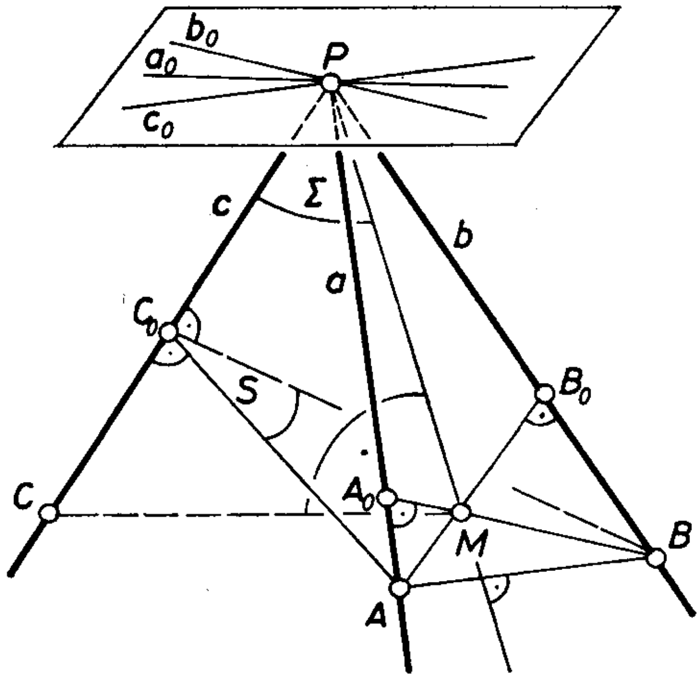
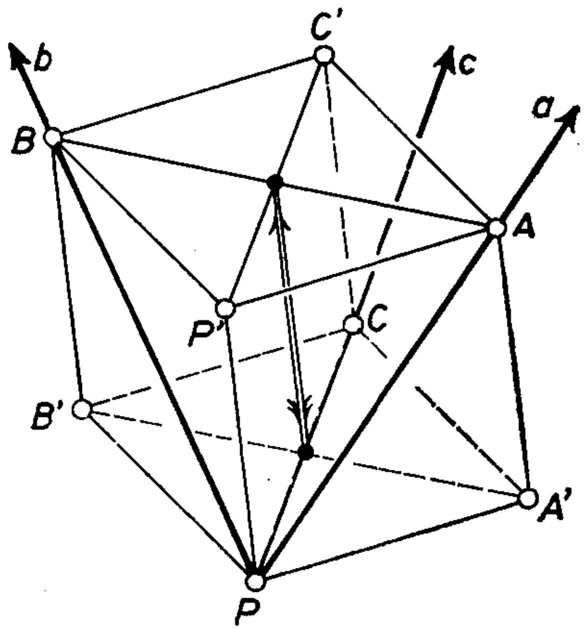
I. megoldás. Jelöljük a három félegyenest a-val, b-vel, c-vel, és a szóban forgó merőlegeseket rendre a_0-lal, b_0-lal, c_0-lal. Legyen továbbá C_0 a c félegyenes tetszőleges, P-től különböző pontja, és S a C_0-on átmenő, c-re merőleges sík. Mivel a és b a c-vel hegyesszöget zár be, mindkettő metszi S-t, jelöljük a metszéspontokat A-val, B-vel.



A kapott AB egyenes benne van az a és b által meghatározott síkban, és merőleges c-re, hiszen S-ben is benne van. Ezért AB párhuzamos c_0-lal. Jelöljük A-nak b-n levő vetületét B_0-lal, B-nek a-n levő vetületét pedig A_0-lal. Mivel a és b hegyesszöget zárnak be, az AB_0 és BA_0 egyenesek metszik egymást, és M metszéspontjuk az ABP háromszög magasságpontja. Emiatt a PM egyenes merőleges AB-re, és ha nem azonos c-vel, akkor azzal együtt AB-re merőleges síkot határoz meg. (Mivel PM és c akkor azonosak, ha c benne van az a és b által meghatározott síkban, ettől az esettől eltekinthetünk, hiszen ekkor a feladat állítása nyilvánvaló.) Jelöljük a c és PM egyenesek által meghatározott síkot Σ-val. Abból, hogy Σ merőleges AB-re, következik, hogy Σ merőleges az ABP síkra is, és ha Σ-ban az M ponton át PM-re merőlegest állítunk, az egyben az ABP síkra is merőleges lesz. Mivel c egyenese nem merőleges az ABP síkra és benne van Σ-ban, c egyenese metszi ezt a merőlegest, jelöljük a metszéspontot C-vel, Az a egyenese merőleges a BA_0, CM egyenesekre, tehát merőleges BC-re is, és így $BC \| a_0$. Hasonlóan kapjuk, hogy $AC \| b_0$, tehát az a_0, b_0, c_0 egyenesek párhuzamosak az ABC síkkal. Mindhárom egyenes átmegy P-n, ezért a három egyenes valóban egy síkban van, amint azt bizonyítanunk kellett.

II. megoldás. Jelöljük a félegyeneseket most is a-val, b-vel, c-vel. A feladat állításának igazolásához elegendő mindegyik félegyenesen egy-egy pontot: A-t, B-t, illetve C-t találni úgy, hogy $a \perp BC$, $b \perp CA$ és $c \perp AB$ teljesüljön, hiszen ekkor a kérdéses merőlegesek mind benne vannak abban a P-n átmenő síkban, amely párhuzamos az ABC síkkal.



Legyen tehát A az a félegyenes tetszőleges pontja, és állítsunk A-ból merőleges síkot c-re. Ez a sík a félegyenesekre tett kikötéseink alapján metszi a b félegyenest, legyen a metszéspont B. Hasonlóan a B-ben emelt, a-ra merőleges sík metszi a c félegyenest, a metszéspontot C-vel jelöljük.

A most kapott A, B, C pontokra $AB \perp c$, illetve $BC \perp a$ a pontok megválasztása miatt teljesül, s így csak az van hátra, hogy megmutassuk: $CA \perp b$. Ehhez toljuk el a PC szakaszt a $P'C'$ helyzetbe úgy, hogy $P'C'$ felezőpontja az AB felezőpontjával essen egybe, s az AB szakaszt az $A'B'$ helyzetbe úgy, hogy ennek felezőpontja a PC szakasz felezőpontjával essen egybe. Az így kapott $PA'CB'P'AC'B$ hatlapú idomot paralelepipedonnak nevezik, lapjai paralelogrammák, szemben álló lapjai párhuzamosak és egybevágók.

Mivel $AB \perp c$, azért $A'B' \perp PC$ is igaz, tehát a $PA'CB'$ lap (és a vele egybevágó $P'AC'B$ lap is) rombusz. Hasonlóan $BC \perp a$ miatt $P'A' \perp PA$, és így a $PA'AP'$ és a $B'CC'B$ lap is rombusz. Ebből pedig következik, hogy a paralelepipedon összes éle egyforma hosszú, tehát a harmadik lappár is rombuszokból áll. Így $P'B' \perp PB$, vagyis $AC \perp b$, ahogyan azt állítottuk.