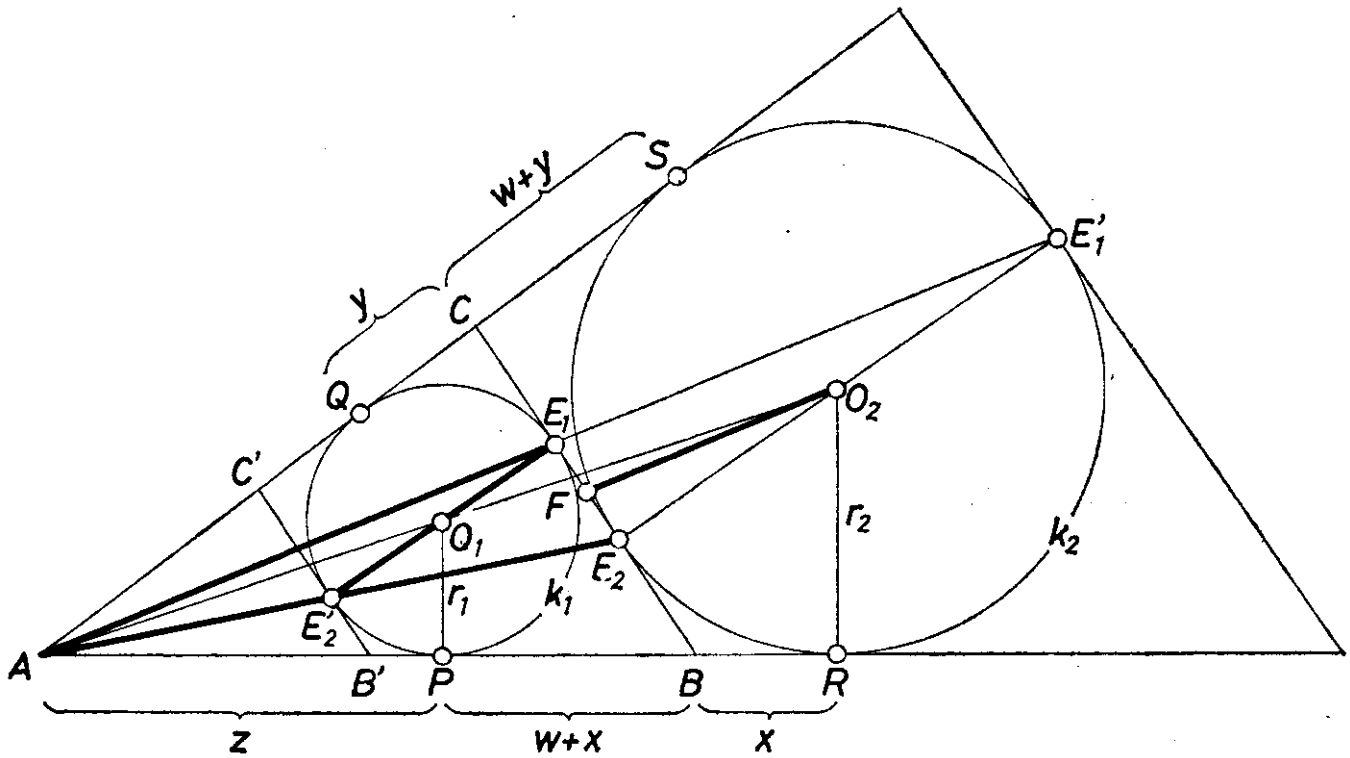
Jelöljük az ABC háromszög beírt körét k_1-gyel, a BC oldalához hozzáírt körét k_2-vel, a körök sugarait pedig r_1-gyel, illetve r_2-vel.



Először azt bizonyítjuk, hogy az AE_2 és E_1O_1 egyenesek a beírt körön metszik egymást. Az A, O_1, O_2 pontok egy egyenesen, a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjén vannak. Az A pont a k_1, k_2 körök külső hasonlósági pontja. Az A középpontú, $\lambda = r_1/r_2$ arányú kicsinyítéssel O_2 az O_1-be, a k_2 kör a k_1 körbe, a k_2 kör E_2-beli érintője, BC, a k_1 kör E_2'-beli érintőjébe, $B'C'$-be megy át (1. ábra). Mivel $B'C'$ párhuzamos BC-vel, így a beírt kört e két egyenes egy átmérő két végpontjában érinti, ezért az E_1, O_1, E_2' pontok egy egyenesen vannak. Az A, E_2, E_2' is egy egyenesen vannak, mivel az A középpontú kicsinyítésben E_2' az E_2 megfelelője. A két egyenes közös pontja, E_2' tehát illeszkedik a k_1 körre.

Ezek után rátérünk annak bizonyítására, hogy az FO_2 és E_1A egyenesek párhuzamosak. Először is azt látjuk be, hogy $CE_1 = BE_2$. A k_1 és k_2 körök közös külső érintőin levő érintési pontok legyenek P, Q, R, S. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége folytán $BE_2 = BR = x$, $CE_1 = CQ = y$, $AQ = AP = z$, továbbá $BE_1 = BP = w+x$ és $CE_2 = CS = w+y$, ahol $w = E_1E_2$. Végül $AR = AS$ alapján $z+w+2x = z+w+2y$, ahonnan $x = y$ adódik. Így F nemcsak a BC, hanem az E_1E_2 szakasznak is felezőpontja. Legyen E_1' az a pont, amelynek képe az előbbi A középpontú kicsinyítésben E_1. Az $E_1'E_1E_2$ háromszögben FO_2 középvonal, mivel $E_1'E_2$ a k_2 kör átmérője. FO_2 tehát párhuzamos E_1E_1'-vel, így AE_1-gyel is.

Egyenlő szárú háromszög esetén, ha $AB = AC$, akkor az FO_2, E_1A, AE_2, E_lO_1 egyenesek egybeesnek, mivel ekkor a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője merőlegesen felezi a BC oldalt. Az állítás erre az esetre módosításra szorul, mivel egybeeső egyenesekre nem mondjuk sem azt, hogy párhuzamosak, sem azt, hogy metszik egymást.

Helyei Judit (Pécs, Bánki Donát u.-i Ált. Isk., 8. o. t.)
dolgozata alapján