Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} = 2. \tag{1}$$

Megoldás: Emeljük köbre mindkét oldalt. Ha a bal oldalon az

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

azonosságot használjuk, akkor egyenletünk rendezés után így alakul:

$$3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1-x} \cdot \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x}\right) = 7. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben éppen (1) bal oldala áll, ami a feltétel szerint 2. Így

$$3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1-x} \cdot 2 = 7, \quad \text{ahonnan}$$

$$\sqrt[3]{x(1-x)} = \frac{7}{6}. \tag{3}$$

Ha $x < 0$, vagy $x > 1$, akkor $x(1-x) < 0$, ha pedig $0 \leqq x \leqq 1$, akkor $1 \geqq 1-x \geqq 0$ is fennáll, tehát $x(1-x) < 1$. Így a bal oldalon mindig 1-nél kisebb szám köbgyöke áll, ami ugyancsak kisebb 1-nél. Tehát az egyenletnek nincs megoldása a valós számok körében.

Megjegyzés. Ha (3)-t köbre emeljük, akkor rendezés után az $x^2 - x + \left(\frac{7}{6}\right)^3 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa negatív, így az egyenletnek nincs valós megoldása.