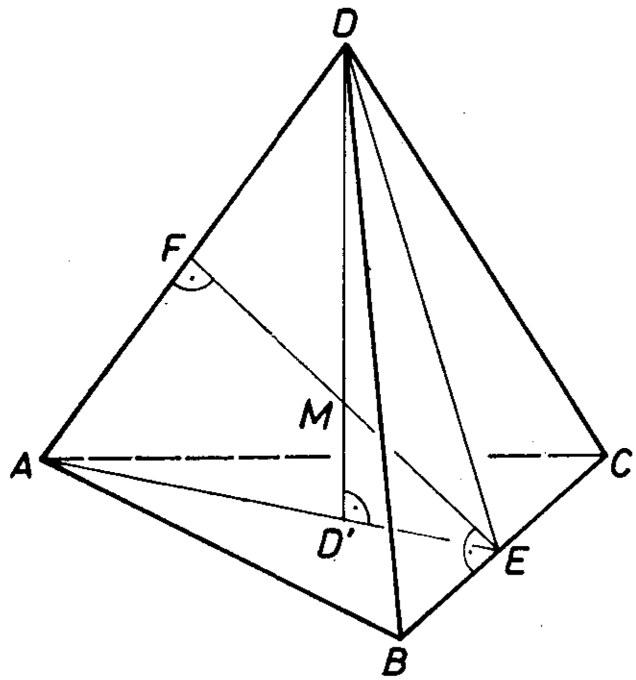

Jelöljük a tetraéder csúcsait A, B, C és D-vel. Mivel a tetraéder szabályos, bármely magasságvonala a szemközti szabályos háromszöget a körülírt körének középpontjában metszi. A magasságvonal körül $120°$-kal elforgatva a tetraédert, önmagába megy át. Ez a forgatás a tetraéder köré, a tetraéderbe írt gömböt, valamint az élérintő gömböt is önmagába viszi át, emiatt mindhárom gömbnek a középpontja a tetraéder magasságpontja, M.

Jelöljük a D csúcsnak az ABC síkra való merőleges vetületét D'-vel. A DD' magasságvonal tartalmazza a tetraéder M magasságpontját és MD' a tetraéderbe írható gömb sugarával egyenlő. Érintse az élérintő gömb az AD élt F-ben, a BC élt E-ben. Így $MF \perp AD$ és $ME \perp BC$, továbbá $ME = MF$ és nyilván F felezi AD-t, E felezi BC-t, hiszen $MD = MA = MC = MB$ a tetraéder köré írt gömb sugarával egyenlő. A DEA háromszög egyenlő szárú, ($ED = EA$) és MF merőlegesen felezi AD-t, így kell, hogy átmenjen a szemközti csúcson, E-n, azaz E, M és F egy egyenesbe esik. Ebből következik, hogy az EMD' és DMF háromszögek M csúcsnál levő szögei csúcsszögek, tehát egyenlők, s mivel $MD'E$ és MFD szögük derékszög, így hasonlóak és megfelelő oldalaikra

$$\frac{EM}{MD'} = \frac{DM}{MF}, \quad ME = MF \quad \text{miatt} \quad EM^2 = MD' \cdot DM,$$

amint azt igazolni akartuk.