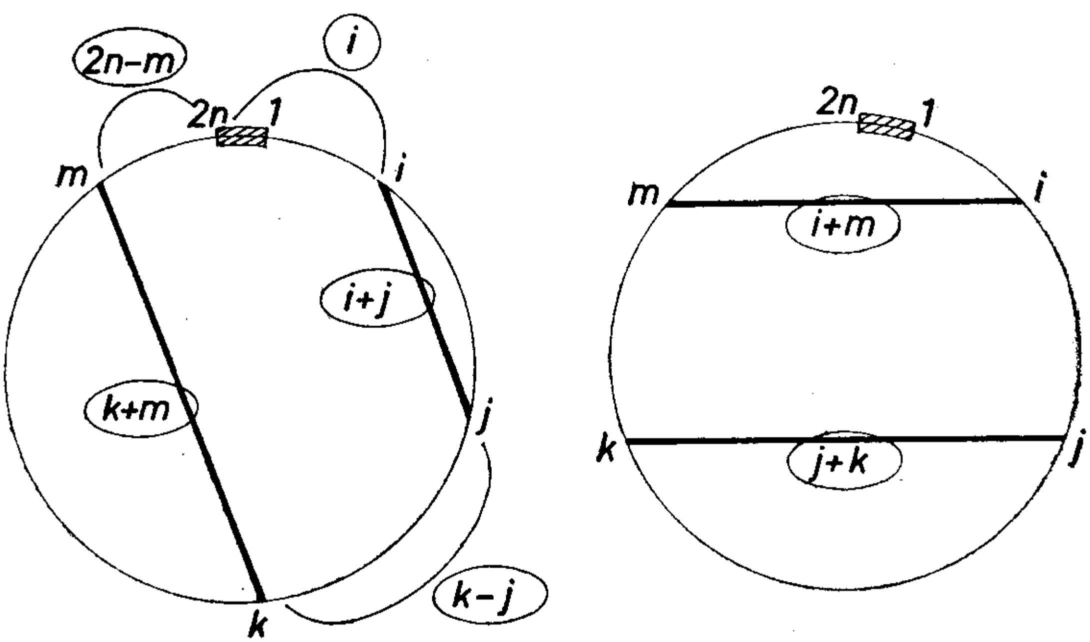
Számozzuk meg a sokszög csúcsait 1-től $2n$-ig tetszőleges csúcson kezdve a számozást, és mondjuk az óramutató járásával megegyező irányban járva be a csúcsokat. Rendeljük a számozás alapján a sokszög tetszőleges két csúcsát összekötő szakaszhoz a végpontokhoz írt számok összegét. Vizsgáljuk meg először, hogy mit kapunk, ha a $P_1P_2\dots P_{2n}P_1$ törtvonalban szereplő szakaszokhoz rendelt számokat összeadjuk. Ebben az összegben 1-től $2n$-ig minden szám kétszer szerepel, hiszen minden csúcsból két szakasz indul ki. Az összeg tehát a csúcsok sorrendjétől függetlenül az első $2n$ pozitív egész szám összegének a kétszerese. Írjuk le kétszer 1-től $2n$-ig a számokat, de úgy, hogy másodszor fordított sorrendben írjuk őket:

$$\begin{array}{ccccc} 1+ & 2 & +\dots+ & k & +\dots+2n+ \\ +2n+ & 2n-1 & +\dots+ & 2n+1-k & +\dots+1. \end{array}$$

Ebben a fordított sorrendben a k-adikhoz a $2n$-től lefelé lépegetve $(k-1)$ lépésben jutunk el, az tehát $2n-(k-1)$. Ha páronként összeadjuk az egy oszlopban álló számokat, mindenütt $(2n+1)$-et kapunk, hiszen k és $2n-(k-1)$ összege minden k mellett ennyi. Mivel pedig $2n$ oszlopunk van, a teljes összeg $2n(2n+1)$.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk két szakasz számairól, ha azok párhuzamosak. A szakaszok négy végpontja a kört négy körívre vágja, ezek közül kettő a két párhuzamos közti sávban van, kettő azon kívül. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az $(1,\ 2n)$ ív hova kerül.



Ha a két párhuzamos között van ez az ív, jelöljük a végpontokhoz írt számokat nagyság szerint növekedve i-vel, j-vel, k-val, m-mel. Mivel egy körből párhuzamos egyenesek egyenlő íveket metszenek ki, most

$$k-j=i+(2n-m),$$

hiszen az $(1,\ 2n)$ ívecskét tartalmazó ív két darabból rakható össze: az m-től $2n$-ig futó ívből és a $2n$-től i-ig futó darabból (a kettő közül az első $m=2n$ mellett egy ponttá zsugorodhat). Rendezzük kicsit át a kapott feltételt:

$$k+m=i+j+2n. \tag{1}$$

Meg kell még vizsgálni azt az esetet, amikor az $(1,\ 2n)$ ívecske nem esik a párhuzamosok közé. A csúcsokat most is nagyság szerint jelölve a párhuzamosság feltételei $j-i=m-k$, vagyis

$$i+m=j+k. \tag{2}$$

Minden esetre érvényes az a megállapítás, hogy a párhuzamos szakaszokhoz rendelt összegek $2n$-nel osztva ugyanazt a maradékot adják. Ez az észrevétel a megoldás kulcsa. Először is megmutatjuk, hogy ez az állítás megfordítható. Mivel a számok 1 és $2n$ közöttiek, az összegek kisebbek $4n$-nél. Így csak úgy lehetnek a maradékok egyenlőek, ha az összegek is egyenlőek, vagy ha az összegek különbsége $2n$. Az első esetben az egyik végpontjaihoz rendelt számokat i-vel, m-mel jelölve, a másikét pedig j-vel, k-val, a (2) összefüggést, majd ebből a párhuzamosságot biztosító $j-i=m-k$ feltételt kapjuk. A másodikban pedig előbb (1)-et kapjuk, majd abból a párhuzamosságot, ha $(i,\ j)$ és $(k,\ m)$ az eredeti két szakasz.

Végül megmutatjuk, hogy ellentmondásra vezet az a feltétel, hogy a $P_1P_2\dots P_{2n}P_1$ töröttvonalnak nincsenek párhuzamos darabjai. Ekkor ugyanis a szakaszokhoz rendelt összegek $2n$-nel osztva páronként különböző maradékot adnának. Mivel a szakaszok száma is $2n$, és a lehetséges maradékok száma is $2n$, ez csak úgy lehetne, ha minden maradékot pontosan egyszer kapnánk meg. Ez viszont azt jelentené, hogy a maradékok összege az első $2n$ pozitív egész szám összegével volna egyenlő, ami az előbb kapott $2n(2n+1)$ kétszeres összeg fele. Mivel pedig a maradékokhoz úgy jutunk, hogy az összegeket vagy változatlan hagyjuk, vagy $2n$-nel csökkentjük, a csökkentések összege $2n$-nel osztható. Ámde $2n$ $(2n+1)$ fele nem osztható $2n$-nel, tehát valóban ellentmondásra vezet a mondott feltétel.

Danyi Pál (Pécs, Nagy Lajos Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladatban szereplő tétel bizonyítása megtalálható Szabó Sándor: Egy szabályos sokszögre vonatkozó észrevétel című dolgozatában (Matematikai Lapok, 28. évf., 1–3. szám (1980), 199–201. oldalak).

Törőcsik Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)