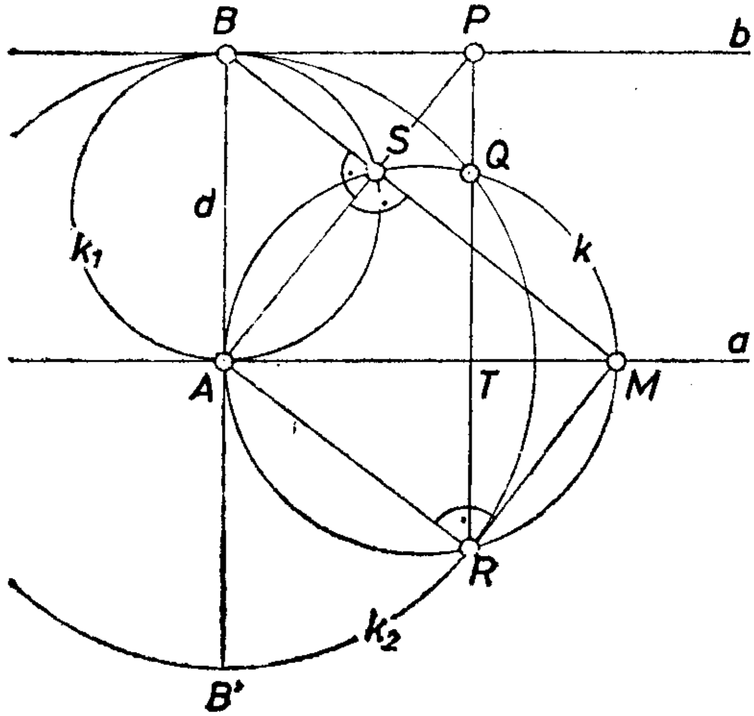
I. megoldás. M nyilván különbözik A-tól, különben k nem rajzolható meg. Kössük össze B-t M-mel, és legyen A-nak a BM-en levő merőleges vetülete S. Ebből az S-ből az AB szakasz is, az AM szakasz is derékszög alatt látszik, tehát S az AM feletti k, és az AB feletti k_1 Thalész-körön is rajta van. Mindkét kör átmegy A-n is, emiatt AS az az egyenes, amelyik P-t metszi ki b-ből.

A közös befogójú ABM, ABP derékszögű háromszögek úgy helyezkednek el, hogy az egyik átfogója a másikban magasságvonal, és mindkettő hasonló az ABS háromszöghöz.



Emiatt a két háromszög megfelelő befogóinak aránya egyenlő

$$AM : AB = AB : BP. \tag{1}$$

Mivel M is, P is az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint S, a P-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes akkor metszi az AM szakaszt, ha $BP \leqq AM$, ami (1) miatt azzal ekvivalens, hogy $AM \geqq AB$. Nyilván ugyanekkor metszi ez az egyenes k-t is, és

$$AT \cdot AM = AQ^2 = AR^2, \tag{2}$$

ahol T a P, Q, R pontok a-n levő vetülete. Ha ugyanis T azonos M-mel, akkor Q és R is azonos M-mel, és (2) triviális; különben Q és R az a-ra tükrösen helyezkedik el, és (2) azAMQ, AMR derékszögű háromszögekben az AQ, AR befogónak az átfogóra eső vetületére vonatkozó ismert összefüggés miatt igaz.

Az (1) és (2) összefüggések, valamint $AT = BP$ miatt $AQ = AR = AB$, vagyis a Q, R pontok az A körüli, B-n átmenő k_2 körnek a-ra tükrösen elhelyezkedő pontjai. Mivel M nem lehet azonos A-val, Q, R egyike sem lehet B-vel, sem annak a-ra vonatkozó B' tükörképével azonos. Megmutatjuk, hogy minden más Q, R pontpár előállítható M alkalmas megválasztásával. Legyen ugyanis U a Q, R pontoknak a-n levő közös vetülete, és mérjük fel az AU félegyenesre az $AM = AB^2/AU$ szakaszt. Tudjuk már, hogy ebből az M-ből kiindulva k_2-nek olyan a-ra szimmetrikus pontpárját kapjuk, amelyek a-n levő T vetületére $AT = AB^2/AM = AU$. Mivel T is, U is az AM szakaszon van, ebből következik, hogy T és U azonosak, tehát M-ből kiindulva éppen az adott Q, R pontpárt kapjuk.

II. megoldás. Válasszuk a koordináta-rendszer x tengelyének az a egyenest, origójának az A pontot, és használjuk változtatás nélkül az I. megoldásban bevezetett jelöléseket. A k és k_1 körök egyenlete

$$x^2 + y^2 = mx, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = dy, \tag{4}$$

ahol m az M abszcisszáját, d pedig a B ordinátáját jelöli. Tudjuk, hogy a két kör metszi egymást, hiszen az origón mindkettő átmegy, de itt nem érintik egymást. A két kör közös pontjainak ordinátáira (3) is, (4) is teljesül, tehát ezekre a két egyenlet különbségeként kapott

$$mx = dy \tag{5}$$

összefüggés is érvényes. Ez mindig egyenes egyenlete, hiszen $d \neq 0$. Ez tehát a két kör metszéspontjain átmenő egyenes egyenlete. A P pontnak, mint a b egyenes minden pontjának, az ordinátája d, tehát P abszcisszája d^2/m. (Itt $m \neq 0$, hiszen M az A-tól különböző pont.) Ugyanennyi a Q, R pontok abszcisszája is, így ezek ordinátája (3) alapján

$$y = \pm\sqrt{\frac{d^2}{m}\left(m - \frac{d^2}{m}\right)};$$

Ebből kiolvasható, hogy a Q, R metszéspontok akkor jönnek létre, ha $|m| \geqq |d|$ és ha létrejönnek, akkor (3) alapján mindkettő koordinátáira

$$x^2 + y^2 = d^2 \tag{6}$$

teljesül, ami az origó körül rajzolt d sugarú kör egyenlete. Tudjuk, hogy a Q, R pontok abszcisszája d^2/m alakú, tehát nem lehet 0. Ha különben Q, R a (6) egyenletű kör egyenlő abszcisszájú pontjai, és közös abszcisszájukat q jelöli, akkor az $m = d^2/q$ értékből kiindulva ugyancsak q abszcisszájú P pontot kapunk, és azon át visszajutunk a Q, R pontokhoz.

Tehát a Q, R pontok az A középpontú, B-n átmenő kör a-ra szimmetrikus pontjai, Q és R lehetnek azonosak, de a Q, R pár nem lehet a B, B' párral azonos.