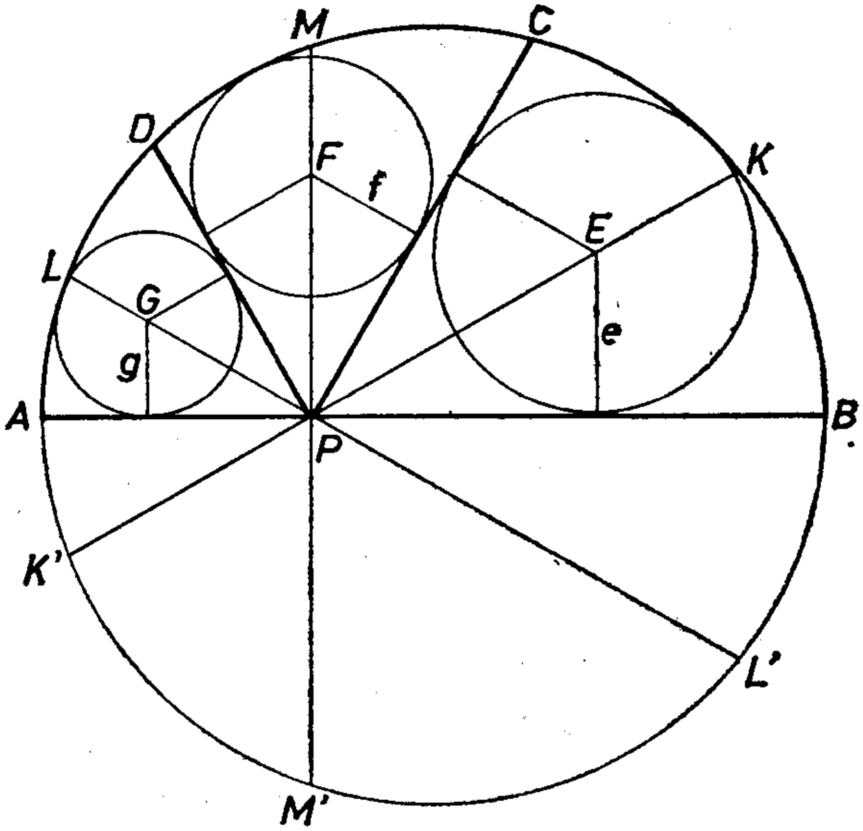

Jelöljük a PBC, PCD, PDA idomokba beírt körök középpontjait rendre E-vel, F-fel, G-vel, sugaraikat e-vel, f-fel, g-vel. Mivel a PE, PF, PG félegyenesek mind $60°$-os szögek felezői,

$$PE = 2e, \quad PF = 2f, \quad PG = 2g. \tag{1}$$

Jelöljük ezeknek a félegyeneseknek az eredeti körrel alkotott metszéspontjait rendre K-val, M-mel, L-lel. Ezek nem lehetnek az egyes idomokba írt körök belső pontjai, így

$$EK \geq e, \quad FM \geq f, \quad GL \geq g, \tag{2}$$

amit (1)-gyel összevetve kapjuk, hogy

$$PK + PM + PL \geq 3(e + f + g).$$

Elegendő tehát belátni, hogy

$$PK + PM + PL \leq 3R.$$

Jelöljük a PK, PM, PL egyeneseknek az eredeti körrel alkotott második metszéspontjait rendre K'-vel, M'-vel, L'-vel. Akkor L és K', M és M', K és L' az AB-re szimmetrikusan helyezkednek el, emiatt

$$2(PK + PM + PL) = (PK + PL') + (PM + PM') + (PL + PK').$$

Ez utóbbi összeg viszont nem más, mint a KK', MM', LL' húrok összhossza, ami nyilvánvalóan legfeljebb $6R$. Egyenlő csak akkor lehet vele, ha a húrok mindegyike átmérő, vagyis P az AB szakasz felezőpontja. Mivel ekkor (2)-ben is az egyenlőség érvényes, ebben (és csakis ebben) az esetben $e + f + g = R$, különben $e + f + g < R$, amint azt bizonyítani kellett.