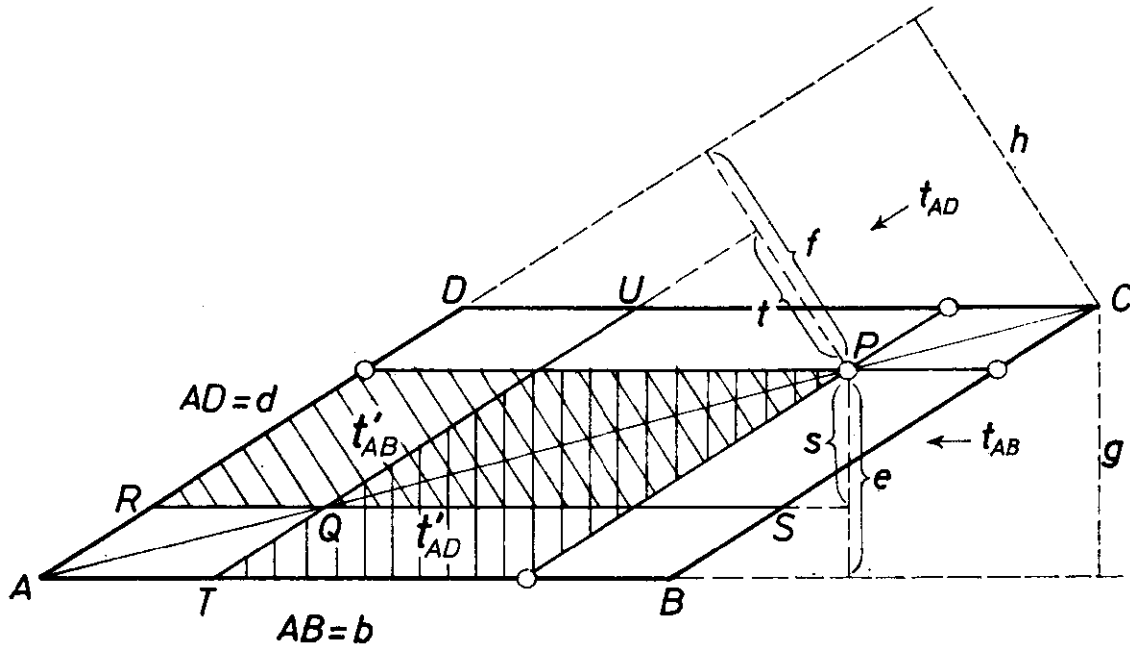


**I. megoldás.** Jelöljük az  $AC$  átlón először felvett pontot  $Q$ -val, és húzzunk  $P$ -n át is a paralelogramma oldalaival párhuzamos egyeneseket. Az  $AB$ -vel párhuzamos,  $P$ -n, illetve  $Q$ -n átmenő egyenesek az  $AD$ ,  $BC$  egyenesekkel együtt egy paralelogrammát fognak közre, jelöljük ennek a területét  $t_{AB}$ -vel.



Ha mondjuk  $RS$ ,  $TU$  közül  $RS$  párhuzamos  $AB$ -vel, akkor  $t_{AB}$  a  $PRS$  háromszög területének a kétszerese, hiszen egyenlő  $RS$  hosszának és  $P$ -nek az  $RS$ -től mért távolságának a szorzatával. Legyen még  $t_{AD}$  a  $P$ -n,  $Q$ -n átmenő,  $AD$ -vel párhuzamos egyenesek, és az  $AB$ ,  $CD$  egyenesek által közrefogott paralelogramma területe.  $RS \parallel AB$  esetén  $t_{AD}$  a  $PTU$  háromszög területének a kétszeresével egyenlő. Így elegendő belátni, hogy  $t_{AB}$  és  $t_{AD}$  egyenlők.

Mivel most már  $P$  és  $Q$  szerepe megegyezik, feltehetjük, hogy közülük mondjuk  $Q$  van  $A$ -hoz közelebb. Tekintsük először azt a paralelogrammát, amelynek  $A$  és  $P$  csúcsa, és oldalai rendre párhuzamosak (vagy azonosak) az eredeti paralelogramma megfelelő oldalaival. Jelöljük a vizsgált sávok ebbe eső darabjainak a területét  $t'_{AB}$ -vel, illetve  $t'_{AD}$ -vel, ezek egyenlősége ismeretes. Ugyancsak tudjuk azt is, hogy a sávoknak a  $QC$  átlójú paralelogrammába eső darabjainak  $t''_{AB}$ ,  $t''_{AD}$  területe egyenlő. Mivel a  $(t'_{AB} + t''_{AB})$  összeg ugyanannak a  $PQ$  átlójú paralelogrammának a területével haladja meg  $t_{AB}$ -t, mint amivel  $(t'_{AD} + t''_{AD})$  a  $t_{AD}$  értékét meghaladja, ezekből már következik  $t_{AB}$  és  $t_{AD}$  egyenlősége.

**II. megoldás.** Legyen továbbra is  $RS$ ,  $TU$  közül  $RS$  párhuzamos  $AB$ -vel, és jelöljük az  $AB$ ,  $AD$  szakaszok hosszát  $b$ -vel,  $d$ -vel, a  $PRS$ ,  $PTU$  háromszögek  $P$ -hez tartozó magasságát  $s$ -sel,  $t$ -vel. Azt kell belátnunk, hogy  $bs = dt$ , vagyis  $s : t = d : b$ . Jelöljük  $P$ -nek az  $AB$ ,  $AD$  egyenesektől mért távolságát  $e$ -vel,  $f$ -fel. A párhuzamos szelők tétele szerint  $e : s = AP : PQ$  (ahol  $Q$  most is  $RS$  és  $TU$  metszéspontját jelöli), és  $f : t = AP : AQ$ , tehát  $e : s = f : t$ , vagyis  $s : t = e : f$ . Jelöljük végül  $C$ -nek az  $AB$ ,  $AD$  egyenesektől mért távolságát  $g$ -vel,  $h$ -val. Ismét a párhuzamos szelők tétele alapján  $e : g = AP : AC$ ,  $f : h = AP : AC$ , tehát  $e : f = g : h$ .

Ezek szerint azt kell belátni, hogy  $g : h = d : b$ , vagyis  $bg = dh$ . Ez viszont nyilvánvaló, hiszen mindkettő az  $ABCD$  paralelogramma területével egyenlő.